PROBLEMAS
DE
MECANICA GENERAL Y APLICADA

F. WITTENBAUER +

TOMO II.

EDITORIAL LABOR. S.A.
BARCELONA - MADRID

PROBLEMAS
DE
MECÁNICA GENERAL
Y APLICADA

F. WITTENBAUER †

PROBLEMAS DE MECÁNICA GENERAL Y APLICADA

Los problemas de Mecánica general forman un conjunto de ejercicios que todo principiante ha de estar en condiciones de resolver si ha asimilado bien las enseñanzas recibidas en clase. Las soluciones de los ejercicios se encuentran totalmente desarrolladas y constituyen la base principal de la materia, de modo que, más que una serie de ejercicicios sueltos, deben considerarse como un conjunto de aplicaciones de las ecuaciones y teorías clásicas. Es esta obra de gran valor para todos los alumnos que se dedican al estudio de la Mecánica en nuestras Universidades y Escuelas especiales

TOMO I

Mecánica general

896 problemas y sus soluciones. Traducción de la sexta edición alemana, corregida y ampliada por el Dr. Ingeniero THEODOR PÖSCHL XVI-365 págs., con 601 figuras en el texto. *(3.ª reimpresión.)*

TOMO II

Elasticidad y Resistencia de materiales

566 problemas y sus soluciones, junto con una colección de fórmulas. Traducción de la cuarta edición alemana, corregida y ampliada por el Dr. Ing. THEODOR PÖSCHL XII-318 págs. con 498 figuras. *(3.ª reimpresión.)*

TOMO III

Líquidos y gases

634 problemas y sus soluciones, junto con una colección de fórmulas. Traducción de la tercera edición alemana, corregida y ampliada por el Dr. Ing. THEODOR PÖSCHL. X-358 págs. con 433 figuras en el texto. *(2.ª reimpresión.)*

F. WITTENBAUER †

PROBLEMAS DE MECÁNICA GENERAL Y APLICADA

TOMO SEGUNDO

Elasticidad y Resistencia de materiales

566 problemas y sus soluciones

CUARTA EDICIÓN PUBLICADA BAJO LA DIRECCIÓN DEL

Dr. Ing. THEODOR PÖSCHL
Profesor de la Escuela Politécnica de Karlsruhe

TRADUCCIÓN DEL ALEMÁN POR

D. ROBERTO DUBLANG
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Con 498 figuras

REIMPRESIÓN

EDITORIAL LABOR, S. A.
BARCELONA - MADRID - BUENOS AIRES - RIO DE JANEIRO
1958

Título de la obra original:

WITTENBAUER, AUFGABEN AUS DER TECHNISCHEN MECHANIK

Editada por

© JULIUS SPRINGER, BERLIN

DEPÓSITO LEGAL: B. 14026. 1958

ES PROPIEDAD

Primera edición: 1938
1.ª reimpresión: 1946
2.ª reimpresión: 1951
3.ª reimpresión: 1958

Imprenta Elzeviriana y Librería Camí, E. C. - Torres Amat, 9 - Barcelona
Reproducción offset - Gratos, S. A. - Paseo Carlos I, 157 - Barcelona

Prólogo del autor

La preparación de la edición presente del segundo tomo hizo de nuevo necesarias múltiples modificaciones y ampliaciones que he procurado introducir sin alterar el carácter de esta obra meritísima.

He suprimido algunos problemas de escaso interés y en su lugar he incluído otros que me parece tienen mayor importancia para la enseñanza técnica.

Una cuestión importante es la de las *notaciones* empleadas en el libro, principalmente las que sirven para designar las diversas cargas de rotura o de trabajo admisible. Como aun no se ha llegado a un acuerdo entre los ingenieros mecánicos y los constructores — las negociaciones sobre el particular no han terminado aún —, y el libro está destinado a todas las especialidades, he utilizado las notaciones más corrientes en la construcción de máquinas, con muy pocas modificaciones.

En una tabla especial he reunido las notaciones usadas en las ediciones anteriores de este libro, las de las normas DIN 1350, que, en general — aunque no del todo —, coinciden con las empleadas por los ingenieros constructores, y que presentan algunos inconvenientes, y las que se usan en la presente edición.

Una dificultad esencial presenta la circunstancia de que en muchas cuestiones fundamentales — principalmente las relativas a propiedades elásticas de los materiales — la investigación ha progresado más de lo que hacen suponer los desarrollos consignados en el libro; sin embargo, en muchos casos los resultados obtenidos no han cristalizado en procedimientos adecuados de cálculo, y un libro de ejercicios como el presente debe atenerse a los métodos ya sancionados por la práctica y debe ser parco en acoger las últimas novedades sobre la materia. He puesto gran cuidado en salvar estas deficiencias hasta donde he creído discreto y posible.

Con las modificaciones introducidas creo que la obra de mi malogrado profesor queda modernizada por completo, y consideraré recompensado mi trabajo si el libro sigue ocupando el puesto preferente que ha tenido hasta ahora en la enseñanza de esta importante rama de la Mecánica técnica.

Me han prestado su valiosa ayuda en la preparación de este libro mi amigo y colega Prof. Dr. K. Körner, de Praga, y mi ayudante Dr. K. Klotter, a los que aquí expreso mi más sincero agradecimiento.

Th. Pöschl

Karlsruhe.

ÍNDICE DE MATERIAS

PARTE PRIMERA

Problemas

Págs.

I. **Tensiones y deformaciones.**

1. El estado elástico lineal y plano (Problemas 1-16)... 1
2. El estado elástico triple (Problemas 17-29)..... 4
3. Dilataciones y distorsiones (Problemas 30-44)..... 6
4. El cuerpo isótropo (Problemas 45-56)..... 8

II. **Resistencia normal (tracciones y compresiones).**

5. Cargas de rotura y coeficientes de trabajo admisibles (Problemas 57-62)..... 10
6. Tracción y compresión (Problemas 63-97)..... 11

III. **Flexión.**

7. Momentos de inercia y momentos resistentes (Problemas 98-122)..... 17
8. Momentos centrífugos y ejes principales (Problemas 123-148)..... 20
9. Momentos de flexión (Problemas 149-174)..... 24
10. Tensiones debidas a la flexión y líneas neutras (Problemas 175-187)..... 28
11. La viga empotrada en un extremo (Problemas 188-205). 30
12. La viga simplemente apoyada (Problemas 206-238). 33
13. Vigas de igual resistencia a la flexión (Problemas 239-247) 38

IV. **Esfuerzo cortante y torsión.**

14. Esfuerzo cortante puro (Problemas 248-269)..... 40
15. Torsión (Problemas 270-292)..... 44

V. **Esfuerzos normales y de flexión (flexión compuesta).**

16. Fibra neutra y núcleo central (Problemas 293-299).. 48
17. Tracción o compresión y flexión (Problemas 300-315) 48

Págs.

VI. Flexión y esfuerzo cortante (flexión sencilla).

18. Diagramas de esfuerzos cortantes (Problemas 316-323). 52
19. Flexión y esfuerzo cortante (Problemas 324-329) ... 53
20. Flexión y torsión (Problemas 330-336) ... 54

VII. Flexión por compresión (pandeo).

21. Pandeo elástico (teoría de Euler) (Problemas 337-352). 56
22. Pandeo plástico. Cálculos técnicos de pandeo (Problemas 353-372) ... 59

VIII. Materiales heterogéneos.

23. Estructuras compuestas (Problemas 373-394) ... 64
24. Sólidos de elasticidad variable (Problemas 395-405). 67

IX. Estructuras hiperestáticas (estáticamente indeterminadas).

25. Vigas hiperestáticas (Problemas 406-414) ... 69
26. Método de las deformaciones (método geométrico) (Problemas 415-441) ... 71
27. El trabajo elástico en las piezas rectas (Problemas 442-469) ... 75
28. El principio del trabajo elástico mínimo (principio de Castigliano) (Problemas 470-486) ... 78
29. La derivada del trabajo elástico (Problemas 487-494). 82

X. Varillas delgadas de directriz curva.

30. Problemas isostáticos (Problemas 495-503) ... 83
31. Problemas hiperestáticos (Problemas 504-516) ... 84

XI. Resistencia dinámica.

32. Tensiones en sólidos móviles (Problemas 517-532) ... 87
33. Vibraciones elásticas (Problemas 533-544) ... 89
34. Resistencia al choque (Problemas 545-566) ... 91

PARTE SEGUNDA

Soluciones ... 95

Formulario ... 301

Los números en cursiva corresponden a los números de las fórmulas del formulario.

Notaciones empleadas en este libro

A, B, C = Reacciones en los apoyos.
B = Carga de rotura con compresión excéntrica.
E = Coeficiente de elasticidad a tracción y compresión (módulo de elasticidad).
E_e = Módulo de elasticidad del hierro.
E_{bd} = Módulo de elasticidad del hormigón trabajando a compresión.
E_{bz} = Módulo de elasticidad en el hormigón trabajando a tracción.
F = Área de una sección transversal.
F_0 = Área reducida (en la resistencia al esfuerzo cortante).
G = Módulo de elasticidad tangencial o transversal.
G = Peso.
H = Fuerza horizontal, empuje.
J = Momento de inercia.
J_x = Momento de inercia de una superficie respecto al eje x.
J_{xy} = Momento centrífugo respecto a los ejes x e y.
$J_1 = J_{máx}$, $J_2 = J_{mín}$ = Momentos de inercia principales.
K = Fuerza auxiliar.
M = Momento flector o de flexión.
M_A, M_B, M_C = Momentos en los apoyos A, B, C.
M_t = Momento torsor o de torsión.
NN = Fibra neutra o de tensiones nulas (línea neutra).
P = Carga o fuerza aislada.
P = Capacidad de carga o carga admisible.
P_k = Carga de rotura por pandeo.
Q = Carga repartida.
Q = Esfuerzo cortante (fuerza tangencial).
R = Carga paralela al eje.
S = Momento estático de una superficie (en la resistencia al esfuerzo cortante).
S = Centro de gravedad, carga total de una barra o cable.
T = Período de una oscilación o vibración.
T = Fuerza de inercia.
V = Volumen; fuerza vertical.
W = Momento resistente.
A = Trabajo elástico o de deformación.
T = Energía cinética (fuerza viva).
a, b = Distancias de una fuerza a los apoyos.
a, b, c = Constantes de la resistencia a la fatiga.
a, b, c = Cosenos directores de una recta.
at = Atmósfera (nueva), es decir, 1 kg./cm.²
b = Base de un rectángulo; ancho.
b, c = Semiejes de una elipse.
c. d. g. = Centro de gravedad.
d, D = Diámetros interior y exterior de un árbol hueco.
e = Dilatación cúbica.
$e_1\ e_2$ = Distancias de la fibra neutra a las extremas.
f = Flecha; desplazamiento de una carga.
f = Coeficiente de rozamiento.
g = Aceleración de la gravedad, 9,81 m/s².
h = Altura de un rectángulo, triángulo, etc.
i = Radio de giro o de inercia de una superficie.
kg = Kilogramo.
l = Luz de una viga; longitud.
l_r = Longitud reducida (en el pandeo).
m = Coeficiente de Poisson (relación de las dilataciones longitudinal y transversal).
m. de i. = Momento de inercia.
$n = \frac{P_{mín}}{P_{máx}}$ (en la resistencia a la fatiga.)
n = Factor dinámico) en la resistencia al choque).
n = Frecuencia en el movimiento vibratorio.
n = distancia del c. d. g. a la fibra neutra.

p = Excentricidad de una fuerza P normal a una sección.
p = Tensión resultante respecto a un plano.
p_1, p_2, p_3 = Tensiones totales de tres planos normales entre sí.
q = Carga uniformemente repartida por unidad de longitud.
r = Radio de un círculo.
r = Brazo de una fuerza R.
t = Tiempo.
t = Tonelada.
z_0, z_t = Distancias del c. d. g.
$\mathfrak{S}$ = Coeficiente de seguridad.
$a = d/D$, razón de diámetros en un anillo circular.
a_0 = Relación de dilataciones (torsión y flexión).
β = Coeficiente de sustentación (en la resistencia al pandeo).
γ = Peso específico.
γ = Distorsión o deslizamiento transversal.
ε = Dilatación.
η_2, η_3 = Constantes en la resistencia a la torsión de las secciones rectangulares.
ϑ = Ángulo de torsión por unidad de longitud.
$\dot{\lambda}$ = Aceleración angular.
λ = l/i, grado de esbeltez (en la resistencia al pandeo).
μ = Coeficiente de Tetmajer (en el pandeo y en la compresión excéntrica).
μ = $E_{bz} : E_{bd}$.
μ_0 = Coeficiente de Bach (en la flexión de la fundición).
ν = $E_z : E_{bd}$.
ϱ = Radio de curvatura.
ϱ = Radio de giro o de inercia en los sólidos.
ϱ = Densidad, densidad lineal.
σ = Tensión normal, carga unitaria normal.
σ_x = Carga unitaria o tensión normal paralela al eje x.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ = Tensiones o cargas principales.
τ = Tensión o carga tangencial.
τ_x = Tensión o carga tangencial, normal al eje Ox.
φ = Ángulo total de torsión, ángulo de giro.
ω = $\sqrt{P/EJ}$, abreviación.
ω = Velocidad angular, frecuencia circular.

Coeficientes de resistencia	Ediciones anteriores	Según DIN 1350	En este libro
Carga de rotura por tracción	K_z	σ_B	K_z
» » » » compresión	K	σ_{-B}	K_d
» » » » flexión	K_b	σ'_B	K_b
» » » » torsión	K_d	τ_B	K_t
» » » » esfuerzo cortante	K_s	τ_B	K_s
» » » » flexión lateral (pandeo)	K_k	σ_k	K_k
Coeficiente o carga de trabajo admisible por tracción	k_z	σ_{zzul}	k_z
Coeficiente o carga de trabajo admisible por compresión	k	σ_{dzul}	k_d
Coeficiente o carga de trabajo admisible por flexión	k_b	σ'_{zul}	k'_b
Coeficiente o carga de trabajo admisible por torsión	k_d	τ'_{zul}	k_t
Coeficiente o carga de trabajo admisible por esfuerzo cortante	k_s	τ_{zul}	k'_s
Coeficiente o carga de trabajo admisible por flexión lateral (pandeo)	k_k	σ_{kzul}	k'_k

Coeficientes de resistencia	Ediciones anteriores	Según DIN 1930	En este libro
Carga límite de proporcionalidad	σ_p	$\sigma_{P,-P}$	σ_P
Límite de elasticidad	σ_e	$\sigma_{E,-E}$	—
» aparente de elasticidad o límite de aplastamiento	σ_f	$\sigma_{S,-S}$	σ_S
Resistencia a la fatiga	A	—	A
» estática (tracción)	K_z	σ_B	K_t
» a una carga intermitente	U	σ_U	U
» » » alternativa u oscilatoria	S	σ_W	V

Advertencia del Traductor. Con objeto de facilitar la impresión del libro y la consulta de otras obras alemanas, he conservado las notaciones y subíndices del original. Para que el lector no necesite consultar las tablas a cada momento, es conveniente aprender el siguiente pequeño vocabulario:

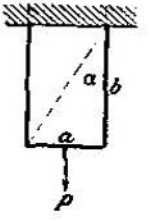
z, inicial de *zug* = tracción; *d*, *druck* = compresión; *b*, *biegung* = flexión; *s*, *schub* = cortadura, empuje; *a*, *arbeit* = trabajo; *k*, *kraft* = fuerza; *k*, *knickung* = pandeo; σ, *spannung* = tensión; *e*, *eisen* = hierro; *b*, *beton* = hormigón; etc.

PARTE PRIMERA

Problemas

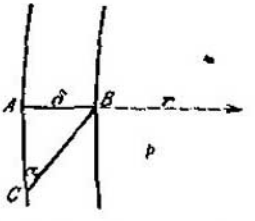
I. Tensiones y deformaciones

1. El estado elástico lineal y plano



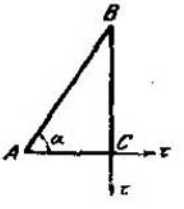
1. Un prisma rectangular de aristas a, b, c está sometido a la acción de la fuerza P. Hallar las tensiones normal σ y tangencial τ en el plano diagonal señalado con puntos.

2. En dos planos normales que pasan por un punto actúan dos tensiones tangenciales τ y τ_1, cuyas direcciones forman ángulos α y α_1 con la intersección de dichos planos. Determinar la relación que debe existir entre τ y τ_1.



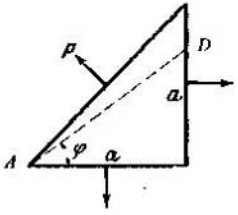
3. ABC es un fragmento prismático de una granada de acero de espesor $\overline{AB} = \delta$, muy pequeño respecto al radio r de la granada. La presión de los gases explosivos es p at. (1 at. = 1 kg./cm.²). Determinar el valor del ángulo α suponiendo que la fragmentación se efectúa a lo largo de los planos en que la tensión tangencial es máxima. (Teoría de la rotura según la máxima carga tangencial.)

(L. Gümbel, ZVDI, tomo 60; pág. 1025; 1916.)

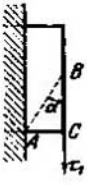


4. Dos planos normales entre sí $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ están sometidos a la sola acción de las cargas tangenciales τ. Determinar el ángulo α de la cara AB del prisma ABC de modo que sobre ella actúe tan sólo una carga normal, y hallar su valor.

5. Un prisma recto cuya sección es un triángulo rectángulo de catetos iguales a, y cuya lon-

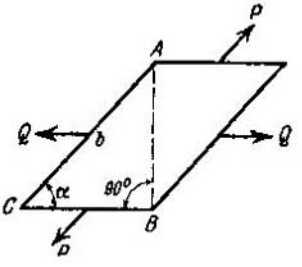


gitud es b, está en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas que se suponen repartidas uniformemente en las superficies respectivas, y de las cuales se conoce la fuerza P que actúa sobre la cara inclinada del prisma. Hallar las tensiones normal, σ y tangencial τ en un plano cualquiera $\overline{AD}$ definido por su inclinación φ.

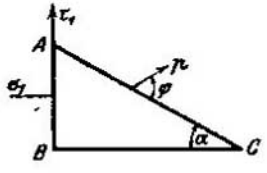


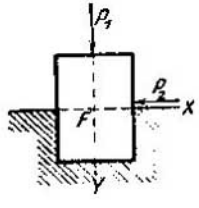
6. En el extremo de un voladizo actúa una carga tangencial uniforme τ_1. Hallar la tensión p resultante en un plano cualquiera definido por el ángulo α y su inclinación respecto a $\overline{AB}$.

7. Un prisma de longitud a, cuya sección es el paralelogramo representado en la figura, está sometido a la acción de fuerzas P y Q iguales y opuestas dos a dos. Hallar las tensiones normal σ y tangencial τ en el plano diagonal $\overline{AB}$.



8. Un prisma cuya sección es el triángulo ABC rectángulo en B y con $\alpha = 30°$ está sometido a la acción de una carga de tracción $\sigma_1 = 80$ at. y a una carga tangencial $\tau_1 = 60$ at., actuando ambas sobre la cara $\overline{AB}$. Determinar la tensión p que actúa sobre la cara $\overline{AC}$ y el ángulo φ de inclinación de p sobre $\overline{AC}$.



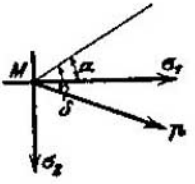


9. Sobre un pequeño prisma de sección $F = 1$ cm.^{2} actúan, tal como indica la figura, una fuerza de compresión P_1 y un esfuerzo cortante P_2, siendo $P_1 = P_2 = 100$ kg. Determinar las tensiones principales y los ángulos que forman con el eje x para el plano F, suponiendo que las cargas se reparten de un modo uniforme.

10. En dos planos que pasan por un punto y forman entre sí el ángulo α actúan las cargas de tracción σ y σ_1 y las cargas tangenciales τ y τ_1. Siendo $\sigma = \tau = 3\tau_1$, determinar la relación $\sigma_1 : \sigma$.

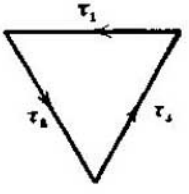
11. En dos planos que pasan por un punto y forman entre si el ángulo α actúan las cargas tangenciales τ y τ'. Demostrar que la diferencia de las cargas normales $\sigma - \sigma'$ es igual a $(\tau + \tau')$ tg α.

12. Se dan las tensiones principales σ_1 y σ_2 en un punto M. Hallar el ángulo α de posición de plano cuya tensión p tiene una inclinación δ mínima respecto al mismo, así como los valores de p y $\delta_{\text{mín}}$.

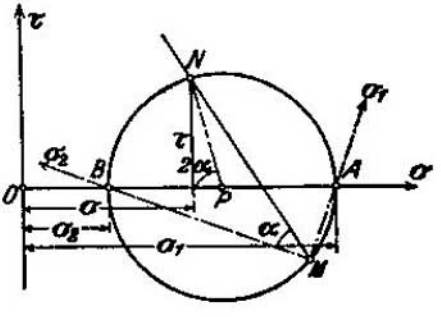


13. Se dan las tensiones principales σ_1 y σ_2 en un punto M. Para un plano cualquiera que pasa por M se halla la tensión normal σ y se lleva en magnitud sobre la perpendicular de modo que $\overline{MN} = \sigma$. Hallar el lugar geométrico de los puntos extremos N en coordenadas polares.

14. En las caras de un prisma cuya sección es un triángulo equilátero actúan las cargas tangenciales τ_1, τ_2 y τ_3, cuyos sentidos son los indicados en la figura. Demostrar que, para que haya equilibrio, debe verificarse $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$.



15. Sean $\sigma_1 = \overline{OA}$ y $\sigma_2 = \overline{OB}$ las tensiones principales en un punto M. Llevémoslas sobre el eje x de un sistema coordenado rectangular a partir del origen O. El punto M se representa de modo que las direcciones de las tensiones principales σ_1, σ_2 pasen por los puntos A y B. Tracemos ahora sobre $\overline{AB}$ como diámetro una circunferencia. Demostrar que tomando un punto N cualquiera de la circunferencia, $\overline{MN}$ es la normal a un plano elástico cuyas tensiones son precisamente las coordenadas σ y τ del punto N.



(O. Mohr, ZVDI tomo 44, págs. 1524, 1572; 1900.)

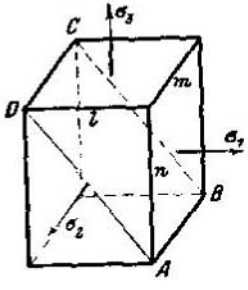
16. Dibujar el círculo de tensiones según el problema anterior para los siguientes casos: *a*) tracción sencilla; *b*) compresión sencilla; *c*) esfuerzo cortante puro τ_0.

2. El estado elástico triple

17. Sean $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$ las tensiones correspondientes a dos planos elásticos que pasan por el punto M; $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$, las normales a esos planos. Demostrar que son iguales las proyecciones de $\bar{p}_1$ sobre $\bar{n}_2$ y la de $\bar{p}_2$ sobre $\bar{n}_1$.

18. Sean $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$ las tensiones en un punto correspondientes a tres planos normales entre sí. Demostrar que la suma $\bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + \bar{p}_3^2$ no varía para tres planos normales cualesquiera que pasen por el mismo punto.

19. Las tensiones normales de tres planos perpendiculares entre sí y que pasan por un punto son σ_x, σ_y, σ_z. Demostrar que su suma no cambia para otros tres planos perpendiculares cualesquiera que pasen por el punto.



20. Las tensiones normales σ_1, σ_2, σ_3 corresponden a las caras de un paralelepípedo recto de aristas l, m, n. Hallar las tensiones normal σ y tangencial τ del plano diagonal $ABCD$.

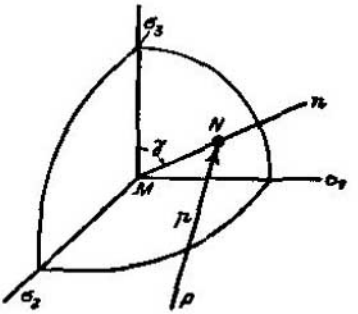
21. Por un punto M de un sólido elástico pasan tres planos normales entre sí xy, yz, zx. El plano xy experimenta el efecto de una tensión normal $\sigma_z = 200$ at. en la dirección de $-z$; en los otros dos planos actúan solamente tensiones tangenciales dirigidas según $+z$: la del plano yz vale $\tau_y = 150$ at., la del xz vale $\tau_x = 80$ at. Hallar la tensión tangencial τ del plano xy y el ángulo que forma con x. Calcular las tensiones principales del punto M y el ángulo que forman con el eje z. Averiguar la forma y posición de la superficie de tensiones.

22. Se dan las tres tensiones principales σ_1, σ_2, σ_3 de un punto M y un plano que pasa por este punto. Sobre la normal a este plano se lleva a partir del punto M el segmento $\overline{MN} = 1/\sqrt{\pm\sigma}$, siendo σ la tensión normal del plano. Variando dicho plano, hallar el lugar geométrico de los puntos N.

23. Se dan las tensiones principales de un punto y un plano que pasa por él. Hallar la tensión tangencial del plano.

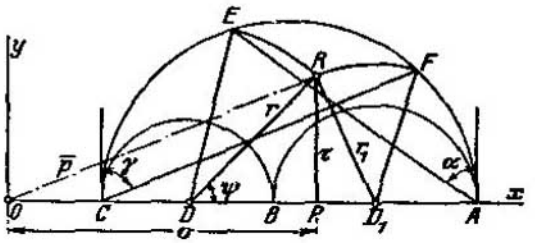
24. De las tres tensiones principales de un punto M, la menor σ_3 es una tracción, las otras dos σ_1 y σ_2 son compresiones. Se traza con centro M una esfera de radio σ_3; sea n la normal

a un elemento superficial en M; N la intersección de esta normal con la superficie esférica; $\overline{PN} = \overline{p}$ la tensión correspondiente al elemento superficial elegido. Hallar el lugar geométrico de los puntos P para todas las normales n que forman el mismo ángulo γ con σ_3.



(O. Mohr, Zivilingenieur, tomo 28, pág. 113, 1882.)

25. Sobre el eje x de un sistema rectangular y a partir del origen O se llevan las tensiones principales $\sigma_1 = \overline{OA}$, $\sigma_2 = \overline{OB}$, $\sigma_3 = \overline{OC}$ de un punto M. Para hallar la tensión total $\overline{p}$ correspondiente a un plano cualquiera que pasa por el punto M puede hacerse la siguiente construcción: Sean α, β, γ los ángulos que la normal al plano forma con las direcciones de las tensiones; se trazan las rectas AE y CF, que forman los ángulos α y γ con la dirección del eje, y se hallan los puntos de intersección E y F de estas rectas con el semicírculo de diámetro AC. A continuación se trazan los arcos FR y ER concéntricos con los semicírculos de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. La distancia del origen O al punto de intersección R de dichos arcos da el valor de la tensión p, y las coordenadas $\overline{OP}$, $\overline{PR}$ del punto R representan, respectivamente, la tensión normal σ y la tangencial τ del plano considerado Demostrar estas propiedades.



(O. Mohr, ZVDI, tomo 44, pág. 1524; 1900.)

26. Sean $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = k$ (constante) las tensiones principales en un punto. Hallar la superficie de tensiones y el lugar geométrico de los planos que tengan solamente tensiones tangenciales y determinar el valor de éstas.

27. La siguiente construcción da idea de la distribución de las tensiones tangenciales en un punto; se traza en M una normal a cada plano que pase por él y se lleva sobre ella el seg-

mento $\overline{MN} = \varrho = 1/\sqrt{\tau}$ a ambos lados, siendo τ la tensión tangencial correspondiente a ese plano. Los puntos N forman una superficie. Hallar su ecuación, sus intersecciones con los planos principales y dibujar un octante de la misma.

28. Determinar el punto de la superficie de tensiones tangenciales (probl. anterior) que está más próximo al M, y la significación de esta mínima distancia y del plano normal a ella que pasa por M.

29. Se dan las tensiones principales $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ de un punto M. Demostrar que la recta g que pasa por M, y cuyos ángulos con las tensiones tienen por cosenos

$$\sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3}},\ 0,\ \sqrt{\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}},$$

tiene la propiedad de ser la dirección de la tensión tangencial para cualquier plano que pase por ella.

3. Dilataciones y distorsiones (*)

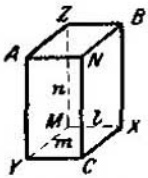
30. Una barra prismática de longitud $l = 4$ m. tiene una dilatación $\varepsilon = 0{,}001$. Calcular su longitud l_1 después de la deformación.

31. Una barra prismática de longitud $l = 2{,}348$ tiene, después de dilatarse, la longitud $l_1 = 2{,}353$. Calcular su dilatación.

32. Una barra prismática tiene antes de la deformación la longitud $l = 0{,}536$, y después, $l_1 = 0{,}535$. Calcular su dilatación.

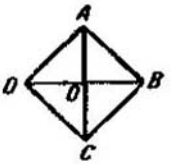
33. Una placa de altura $\overline{AB} = 20$ cm. se deforma de modo que considerando $\overline{AC}$ como fijo, $\overline{BD}$ tiene un deslizamiento horizontal de 0,1 mm. Hallar la distorsión γ del ángulo BAC.

34. Un bloque regular de aristas 0,4 cm., 0,2 cm. y 0,3 cm. se forma de modo que sus longitudes llegan a valer 0,4004 cm., 0,20006 cm. y 0,29985 cm. Hallar su dilatación cúbica.



35. Un bloque regular cuyas aristas están en la relación $l : m : n = 1 : 1 : 2$ se deforma de modo que sus caras siguen siendo normales entre sí y las dilataciones de las aristas tienen valores de 1/50, 1/80, 1/100. Calcular la dilatación de la diagonal $\overline{MN}$.

(*) Llamadas, respectivamente, en lenguaje técnico vulgar «alargamientos y deslizamientos transversales». En lo que sigue usaremos las palabras dilatación y distorsión para designar las respectivas deformaciones referidas a la unidad; esto es, al alargamiento o giro por unidad de longitud. — *N. del T.*



36. El cuadrado $ABCD$ es la base de un prisma. La diagonal $\overline{DB}$ experimenta una dilatación ε_1; la $\overline{AC}$, una dilatación $-\varepsilon_2$. Calcular la dilatación de la arista $\overline{AB}$ y la distorsión del ángulo $\overline{ABC}$.

37. Las tres dilataciones principales en un punto de un sólido elástico son iguales entre sí. Hallar la distorsión de dos planos cualesquiera normales que pasan por el punto.

38. Las tres dilataciones principales en un punto son ε_1, ε_2, ε_3. Hallar el lugar geométrico de las rectas que pasan por el punto para las cuales la dilatación tiene un valor dado ε.

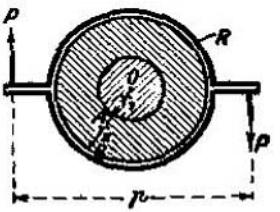
39. Un paralelepípedo recto rectangular (véase figura del problema **35**) tiene aristas cuyas longitudes están entre sí como $l : m : n = 2 : 3 : 5$. El paralelepípedo se deforma sin alterarse la longitud de sus aristas, pero los ángulos adquieren los siguientes valores: $\sphericalangle BxC = 90° 0' 3''$, $\sphericalangle CyA = 89° 59' 54''$, $\sphericalangle AzB = 89° 59' 56''$. Calcular la dilatación en dirección de la diagonal $\overline{MN}$.

40. Las dilataciones ε_x, ε_y, ε_z en un punto según tres direcciones normales entre sí, son iguales a ε_0. Las distorsiones γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} de las tres caras son también iguales. Hallar el lugar geométrico de todas las rectas que pasan por el punto, cuya dilatación es igual a ε_0.

41. Las dilataciones ε_x, ε_y, ε_z en un punto según tres direcciones normales son iguales entre sí y su valor es ε_0. Las distorsiones γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} de las tres caras son también iguales y su valor es $2\varepsilon_0$. Hallar la dilatación ε de una recta cualquiera cuyos cosenos directores son a, b, c. Determinar la magnitud y dirección de las dilataciones principales ε_1, ε_2, ε_3.

42. Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles experimentan la dilatación ε_1; la hipotenusa, la $-\varepsilon_2$. Calcular la dilatación ε de la altura del triángulo y la distorsión γ del ángulo recto del mismo.

43. Los catetos a y b y la hipotenusa c de un triángulo rectángulo experimentan las dilataciones respectivas ε_1, ε_2, ε_3. Hallar la distorsión del ángulo recto del triángulo.

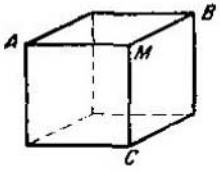


44. Un cilindro hueco de radios $\overline{OA} = r_1$ y $\overline{OB} = r_2$ y altura h cuya superficie interior está fija, se sujeta con un anillo o abrazadera R en cuyas bridas actúan dos fuerzas P en sentido contrario. Calcular el desplazamiento elástico del punto B con respecto al punto fijo A.

(M. Grübler, ZVDI, tomo 53, pag. 449, 1909.)

4. El cuerpo isótropo

45. Las aristas de un paralelepípedo recto rectangular tienen las siguientes longitudes: $\overline{AM} = 2$ cm., $\overline{BM} = 1{,}6$ cm., $\overline{CM} = 2{,}8$ cm., y sus caras están sometidas a la acción de las siguientes fuerzas: la $\overline{BC}$ a 670 kg. de tracción; la $\overline{CA}$ a 940 kg. de compresión; la AB a 730 kg. de compresión. El coeficiente de elasticidad es $E = 2 \cdot 10^6$ at.; el de Poisson, $m = 10/3$. Hallar las dilataciones de las tres aristas.



46. Un cubo está situado en un espacio donde reina una presión de $p = 20$ at. Su volumen disminuye en $\frac{1}{10^5}$. Calcular la relación m de las dilataciones longitudinal y transversal (o sea el coeficiente de Poisson), sabiendo que el coeficiente de elasticidad $E = 2 \cdot 10^6$ at.

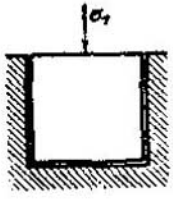
47. Un cuerpo isótropo está sometido por todas partes a la presión uniforme p, y e es la dilatación cúbica correspondiente. Calcular el módulo de compresión $k = p/e$ suponiendo conocidos el coeficiente de elasticidad E y el de Poisson m.

48. Los puntos de un cuerpo isótropo tienen las tensiones principales $\sigma_1 = 1000$ at., $\sigma_2 = -600$ at. La dilatación cúbica es nula. Calcular la tercera tensión principal σ_3.

49. Un paralelepípedo recto rectangular a, b, c está solicitado por tres fuerzas normales A, B, C paralelas a las aristas. Hallar la relación que debe enlazar estas seis cantidades para que el volumen del paralelepípedo permanezca invariable.

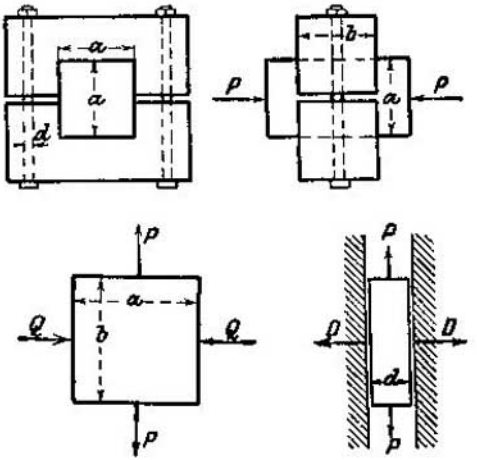
50. Una barra prismática de 0,4 m. de longitud y 5 mm. de ancho experimenta un alargamiento de 0,5 mm. Los coeficientes de elasticidad del material son $E = 2{,}2 \cdot 10^6$ para la tracción, y $G = 0{,}85 \cdot 10^6$ para el esfuerzo cortante. Calcular la variación del ancho b.

51. Las dilataciones principales en un punto de un sólido tienen las siguientes relaciones: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3/n$. ¿En qué relación estarán las tensiones principales?



52. Un cubo se encaja en un hueco adecuado de paredes rígidas y sobre la cara libre se hace actuar la presión σ_1. Calcular las compresiones que las caras del cubo producen sobre las paredes del hueco.

53. Un trozo de hierro, de sección cuadrada a^2, sometido a la compresión de las fuerzas iguales P, está encepado entre dos piezas atornilladas, de modo que su ancho a permanezca invariable. Expresar la tensión σ que se produce en los pernos, en función de P, y de las dimensiones a, b, d.



54. Una placa rectangular de espesor d está comprendida entre dos planos paralelos rígidos cuya distancia es invariable. La placa está sometida a las fuerzas de tracción P y de compresión Q indicadas en la figura. Calcular las presiones D que la placa ejerce sobre los planos.

55. Una barra prismática sometida a la acción de las fuerzas axiales P_1 y P_2 adquiere longitudes respectivas l_1 y l_2 y secciones F_1 y F_2. Determinar con estos datos el coeficiente de elasticidad del material y la longitud primitiva de la barra.

56. La sección de un hierro redondo sometido a la acción de dos fuerzas axiales P_1 y P_2 varía, siendo los valores respectivos de sus radios, r_1 y r_2. Determinar con estos datos el coeficiente de Poisson m y el radio primitivo del hierro.

(A. Leon, ZS. d. öst. Ing. u. Arch.-Ver., tomo 16, pág. 473, 1908.)

II. Resistencia normal

5. Cargas de rotura y coeficientes de trabajo admisibles

57. Von Tetmajer recomienda calcular la resistencia de una barra, sometida a la acción alternativa de dos fuerzas distintas $P_{mín}$ y $P_{máx}$, empleando la siguiente fórmula:

$$\text{carga de fatiga } A = a + bn + n^2,$$

siendo $n = P_{mín} / P_{máx}$. Determinar las constantes a, b, c de un material, siendo conocidas experimentalmente: la carga estática de rotura K_r, la gradual U y la oscilatoria V (véase formulario al final).

58. Determinar las cargas de fatiga del hierro dulce, acero dulce y acero semiduro, haciendo uso de los valores de la fórmula (17).

59. Una barra de hierro dulce está sometida a la acción alternativa de esfuerzos de tracción de 15 t. y 3 t., respectivamente. Su coeficiente de trabajo k'_t debe ser 2/7 de la carga de fatiga. Hallar su valor con los datos de v. Tetmajer (véase problema 58).

60. Una barra de acero dulce está sometida a la acción alternativa de 20 t. de compresión y 8 t. de tracción. El coeficiente de trabajo admisible debe ser 2/7 de la carga de fatiga. Determinar su valor.

61. Se tienen dos barras del mismo material: la una está sometida a la acción de esfuerzos variables entre O y P; la otra, a la de esfuerzos variables entre $-P/m$ y $+P/m$. Hallar el valor de m para que el coeficiente de seguridad sea el mismo en ambos casos.

62. Tres barras de ensayo del mismo material de hierro y 6 cm.² de sección se rompen bajo la acción muy repetida de cargas que oscilan entre los siguientes valores:

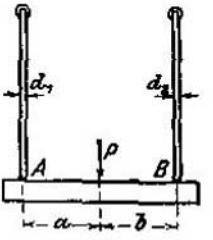
Barra I: 17,85 t. de tracción y 8,925 t. de tracción.
Barra II: 9,6 t. de tracción y 3,2 t. de compresión.
Barra III: 8,85 t. de compresión y 4,425 t. de tracción.

Determinar el valor de la carga estática de rotura K_r.

6. Tracción y compresión

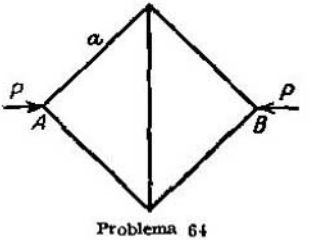
(Véanse también los problemas del primer grupo del apartado 26.)

63. Una viga $\overline{AB}$ está colgada, por sus extremos, de dos barras de igual longitud y diámetros d_1 y d_2, respectivamente. ¿En qué punto deberá cargarse la viga ($a : b = ?$) para que permanezca horizontal?



Problema 63

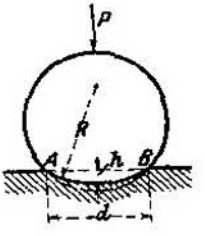
64. Un entramado cuadrado formado por cinco varillas (véase fig.) está comprimido por las fuerzas P. Las varillas tienen el mismo diámetro y son de igual material. Hallar el acercamiento de los puntos A y B.



Problema 64

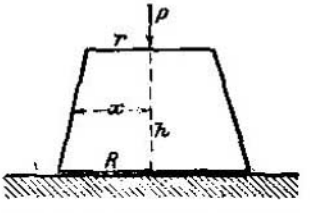
65. Una pieza prismática de peso G y longitud l reposa sobre un plano horizontal. Calcular el descenso de su c. d. g.

66. El ensayo de Brinell consiste en comprimir, contra el cuerpo cuya dureza se busca, una pequeña bola de acero. Se ha comprobado que, para presiones pequeñas, $P = Ch$, siendo C una constante y h la flecha o altura de la huella producida (un casquete esférico). Hallar la relación entre p y R, siendo p la presión media (unitaria) sobre el círculo de diámetro AB, y R el radio de curvatura de la huella en forma de casquete.



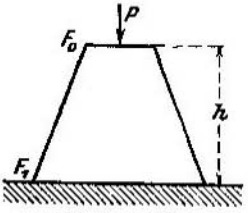
(A. Martens y E. Heyn, ZVDI, tomo 52, página. 1719 ; 1908.)

67. Un tronco de cono de altura h, radios R y r y peso específico γ está sometido a la acción de la fuerza P. Hallar el radio x de la sección menos cargada.



68. Determinar en el problema anterior la relación de P con el peso total G del tronco de cono, siendo $R = 2r$ y la sección menos cargada la correspondiente a la mitad de la altura.

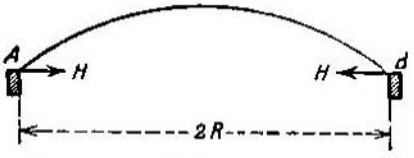
69. Un tronco de cono recto de altura h, y cuyas secciones extremas tienen las áreas F_0 y F_1, experimenta la acción de la



Problema 69

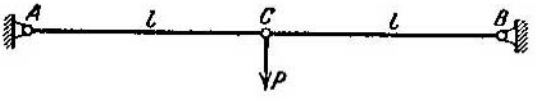
fuerza P. Determinar el acortamiento del tronco, prescindiendo del peso propio.

70. Una barra prismática de peso G apoyada sobre un plano horizontal se cuelga de un gancho por su otro extremo. La longitud de la barra permanece invariable. ¿Cómo se reparte el peso entre el gancho y la superficie de apoyo?

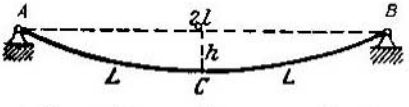


71. Una cúpula rebajada se apoya en un anillo fijo de diámetro $2R$ y sección rectangular. El empuje de la cúpula por unidad de longitud de anillo es H. Hallar el esfuerzo total de tracción que experimenta el anillo.

72. Tres articulaciones alineadas A, C, B están unidas por dos varillas de igual longitud y de sección F. La fuerza P actúa en la articulación C. Hallar la relación entre P y el descenso f del punto C.



73. Un cable, que descargado tiene la longitud $2L$ y que pesa q kg. por unidad de longitud, se tiende entre los puntos A y B, siendo $\overline{AB} = 2L$. Determinar la flecha h en el punto medio, suponiendo que la línea funicular es una parábola.



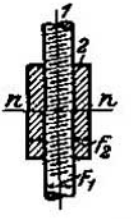
74. Una barra que cuelga verticalmente y cuya sección superior F_1 es conocida, ha de tener tal forma que su tensión σ sea constante en cualquier punto. La única fuerza que soporta la barra es el peso propio, siendo su peso específico γ. Hallar la variación de F en función de la distancia x a F_1. Determinar la longitud que puede llegar a tener la pieza, su sección inferior F_0 y su peso. (Problema de la pieza de igual resistencia a la tracción.)

---

75. Una barra de hierro de 1 cm.^{2} de sección y 4 m. de longitud, guiada de modo que no pueda desviarse lateralmente, se calienta y dilata en consecuencia 1 mm. de longitud. Calcular la fuerza necesaria para coartar o impedir esta dilatación (coeficiente de elasticidad, $E = 2 \cdot 10^6$ at.).

76. Una barra que cuelga libremente, de 4 cm. de ancho y 2 cm. de espesor, se enfría desde $t_0 = 20°$ de temperatura inicial hasta $t_1 = -10°$ de temperatura final. La contracción que experimenta la barra debe impedirse colgando de ella un peso. Calcular este peso, sabiendo que el coeficiente de dilatación del hierro es $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ (para 1° C.).

77. Un tornillo de acero se atornilla en una tuerca de cobre a la temperatura $t = 15°$ C. y se calienta el conjunto a $t = 215°$ C. Calcular las tensiones que se originan en la sección $n-n$, siendo conocidos la sección del tornillo $F_1 = 6$ cm.², íd. de la tuerca $F_2 = 18$ cm.² y siendo el coeficiente de dilatación del hierro $\alpha_1 = 125 \cdot 10^{-7}/°$ C., y el del cobre $\alpha_2 = 165 \cdot 10^{-7}/°$ C.



(S. Timoshenko, Festigkeitslehre.)

78. Se tiende un cable entre dos puntos a la distancia $2l$, a una temperatura de $t_1°$ C. Demostrar que la flecha h_1 que hay que dar al cable para que a la temperatura mínima que puede establecerse $t_0 = t_1 - t$, la tensión en el punto más bajo no exceda de un valor $\sigma_0 = k'_z$ fijado de antemano viene dada por

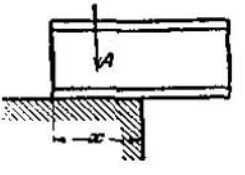
$$h_1^3 - \frac{3l^2}{2}\left(\frac{\gamma^2 l^2}{6\sigma_0^2} + \alpha t - \frac{\sigma_0}{E}\right) h_1 = \frac{3\gamma l^4}{4E}.$$

(H. Wehage, Ziviling, tomo 25, pág. 621, 1879.)

79. Un tirante de armadura que debe resistir un esfuerzo total de tracción de $P = 6830$ kg. debe tener sección circular. Calcular su diámetro d, siendo su coeficiente de trabajo $k'_z = 1000$ at. (Sin tener en cuenta el peso propio.)

80. Calcular el esfuerzo estático de tracción necesario para romper una barra de acero dulce cuya sección es un triángulo equilátero de 4 cm. de lado. (Carga de rotura, $K_z = 4000$ at.)

81. La presión total de una viga, de anchura $b = 30$ cm., sobre su apoyo es A 8 t. Calcular la longitud x del apoyo, sabiendo que el coeficiente de trabajo por compresión de la fábrica de ladrillo es $k'_d = 5$ at.



82. Una barra de $l = 30$ m. de longitud y sección circular debe soportar en su extremo un peso $P = 800$ kg. Calcular su diámetro d teniendo en cuenta el peso propio. (Peso específico, $\gamma = 7'7$; coeficiente de trabajo por tracción, $k'_z = 700$ at.)

83. La sección de un cable tiene 36 alambres, cada uno de $\delta = 2$ mm. de espesor. Determinar el peso Q que puede soportar

con seguridad. Averiguar el peso P que provoca la rotura del cable. (Coeficiente de trabajo por tracción, $k_z' = 600$ at.; carga de rotura a la tracción, $K_z = 5600$ at.)

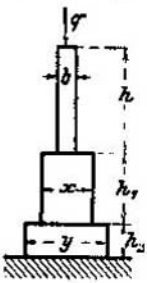
84. Se llama longitud de rotura a la de una barra prismática de un material que colgando libremente se rompe por efecto de su propio peso. Hallar esta longitud de rotura en función de la carga de rotura a la tracción K_z y del peso específico γ. Aplicación a

madera, $K_z = 790$ at., $\gamma = 0{,}5$;
hierro dulce, $K_z = 3800$ at., $\gamma = 7{,}8$.

85. Una columna hueca de fundición, de $d = 20$ cm. de diámetro exterior, debe soportar un peso $P = 50$ t. con un coeficiente de seguridad por compresión igual a 10. Calcular el espesor de la misma. (Carga de rotura por compresión, $K_d = 7500$ atmósferas.)

86. Un sillar de aristas a, b, c, peso específico γ y carga de rotura por compresión K_d se apoya sucesivamente sobre cada una de sus caras. Hallar la relación de las cargas totales P_1, P_2, P_3 que puede soportar con igual seguridad cuando sean respectivamente verticales las aristas a, b y c.

87. Un muro de ladrillo debe tener una altura tal que la hilada inferior resista a la compresión con un coeficiente de seguridad igual a 20. Determinar la altura, siendo su peso específico $\gamma = 1{,}6$. (Carga de rotura por compresión, $K_d = 100$ at.)

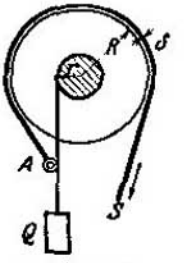


88. Un muro de ladrillo tiene tres retallos de alturas $h = 3$ m., $h_1 = 2$ m., $h_2 = 1$ m., la anchura de la coronación es $b = 0{,}4$ m., el cimiento debe cargarse a razón de 3 at., y éste es también el valor de la carga admisible de la fábrica. Hallar la carga actuante q que puede soportar el muro por unidad de longitud y las anchuras x e y. (Peso específico del muro, $\gamma = 1{,}6$.)

89. Una correa de transmisión de espesor $\delta = 4$ mm. y que trabaja sobre dos poleas de radio $R = 1{,}2$ m., transmite una potencia $N = 12$ CV. Las poleas dan $n = 60$ vueltas por minuto. Calcular la anchura b de la correa, siendo la carga de tracción admisible $k_z' = 20$ at.

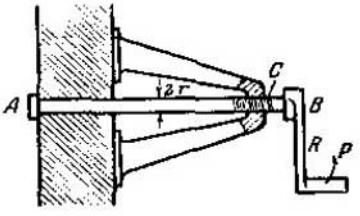
90. Para sostener la carga Q se pasa sobre una polea (radio R) una cinta de acero (espesor δ) sujeta en A y estirada por el otro extremo con la fuerza S. Calcular la anchura b de la cinta, siendo

el coeficiente de trabajo por tracción k'_z. Aplicación al caso: $Q = 4$ t., $\delta = 3$ mm., $r = 10$ cm., $R = 30$ cm., $k'_z = 1000$ at., $\alpha =$ arco abrazado por la cinta $= 1{,}2\,\pi$, $f =$ coeficiente de rozamiento de la cinta $= 0{,}18$.



Problema 90

91. Una barra $\overline{AB}$ de hierro forjado de sección circular de 1 cm. de radio se hace girar por medio de un manubrio de $R = 0{,}5$ metros; la barra está roscada en C y se atornilla a una tuerca fija. El ángulo de inclinación de la rosca vale $\alpha = 3° 30'$, y el coeficiente de rozamiento, $f = 0{,}1$. Calcular la fuerza P que ha de aplicarse a la manivela para romper la barra. (Carga de rotura por tracción, $K_z = 4000$ at.)



92. Una barra redonda de acero dulce ha de soportar alternativamente esfuerzos de tracción de 40 t. y 2 t. Hallar su diámetro, siendo su coeficiente de trabajo por tracción 2/7 de la carga de fatiga.

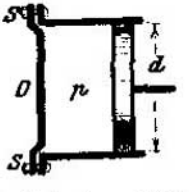
93. La diagonal de una viga de celosía ha de soportar alternativamente esfuerzos de tracción de 14 t. y 5 t. El coeficiente de trabajo debe fijarse con arreglo a la fórmula empleada para el acero dulce:

$$k'_z = 700 + 430n + 100\ n^2,$$

siendo n la relación del mínimo al máximo esfuerzo. La diagonal debe ser un hierro plano de $d = 1$ cm. de espesor. Calcular la anchura b del mismo.

94. ¿Cómo se modifica el resultado del problema anterior cuando la oscilación de esfuerzos es entre 6 t. de tracción y 2 t. de compresión?

95. Un cilindro de vapor tiene $d = 800$ mm. de diámetro y la presión p del vapor es de 7 at. La tapa D del cilindro se sujeta con $n = 8$ pernos. Calcular el diámetro de ellos (acero dulce) teniendo en cuenta las alternativas de presión y descarga. (Se prescindirá de la presión de la junta.)



96. Calcular el alargamiento de una barra vertical de $l = 200$ metros de longitud y sección circular por efecto de un peso $P = 6$ t. colgado en su extremo y del peso propio, siendo su

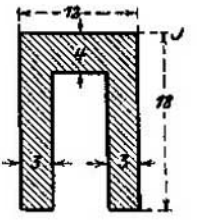
coeficiente de trabajo $k'_t = 600$ at. (Módulo de elasticidad, $E = 2 \cdot 10^6$ at.; peso específico, $\gamma = 7{,}8$.)

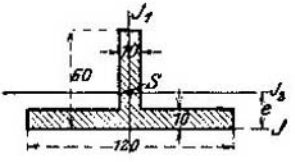
97. Si la barra del problema anterior se compone de cuatro trozos iguales, todos ellos de sección circular, ¿qué diámetros deberán tener esos trozos? ¿Qué ahorro de material se obtiene? ¿Cuál será entonces el alargamiento?

III. Flexión

7. Momentos de inercia y momentos resistentes

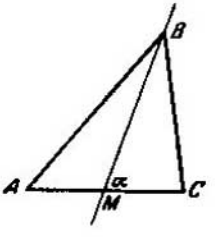
98. Determinar el momento de inercia J de la sección representada en la figura respecto al borde superior, y los momentos principales de inercia J_1, J_2 respecto al centro de gravedad. (Acotaciones en centímetros.)

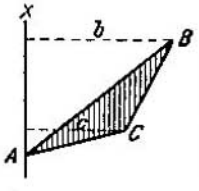




99. Hallar el momento de inercia J, respecto a la base, del perfil T representado en la figura (acotaciones en milímetros) y los momentos de inercia principales respecto al c. d. g.

100. Calcular el momento de inercia de la superficie de un triángulo respecto a una de sus medianas MB.



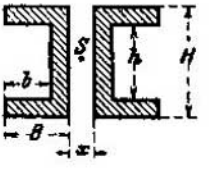


101. Averiguar la expresión del momento de inercia de un triángulo ABC respecto a una recta cualquiera Ax que pasa por el vértice A en función del área F y de las distancias b y c. (E. J. Routh.)

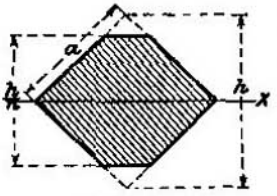
102. Determinar el momento de inercia J de un trapecio respecto a la base a, y el J_s respecto a la paralela a dicha base que pasa por el c. d. g.

103. Hallar la expresión del momento de inercia de la superficie de un hexágono regular respecto a un eje cualquiera que pasa por el c. d. g. en función de la longitud s del lado.

104. Dos perfiles en U iguales deben separarse a una distancia x tal que los momentos principales de inercia sean iguales. Hallar el valor de x.

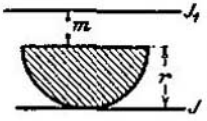


105. Hallar los momentos de inercia y resistente de un cuadrado de lado a cuyos vérti-

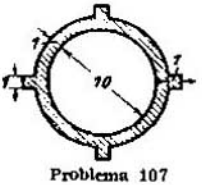


Problema 105

ces superior e inferior están truncados, respecto al eje de las x, en función de n, siendo h/n la altura del cuadrado truncado. Averiguar para qué valor de n resulta máximo el momento resistente, y determinar su valor.
(B. Kirsch, ZVDI, tomo 42, pág. 797; 1898.)



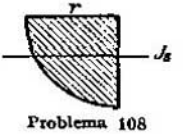
106. Calcular el momento de inercia de un semicírculo respecto a la tangente inferior (J) y respecto a una paralela a ella (J_1) a la distancia m del diámetro.



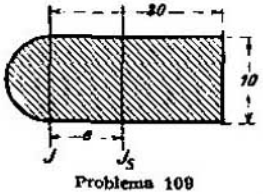
Problema 107

107. Hallar los momentos de inercia y resistente de la sección representada en la figura respecto al diámetro horizontal (medidas en centímetros).

108. Averiguar el momento de inercia J_s de un cuarto de círculo respecto a un eje de gravedad.

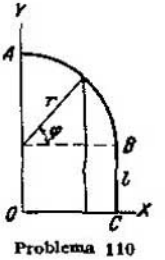


Problema 108



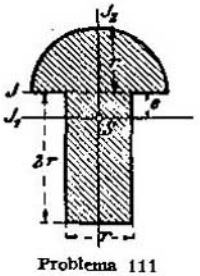
Problema 109

109. Determinar el momento de inercia de la sección dibujada respecto a la recta J y al eje de gravedad J_s (las medidas son centímetros).



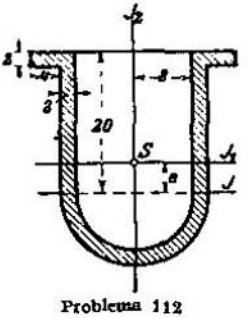
Problema 110

110. Calcular el momento de inercia de la línea homogénea ABC (densidad = 1) respecto a los ejes Ox y Oy. AB es un cuadrante de circunferencia.



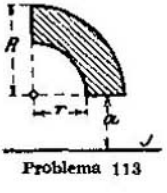
Problema 111

111. Calcular los momentos de inercia principales J_1 y J_2 de la sección longitudinal de un roblón.



Problema 112

112. Hallar los momentos principales de inercia J_1 y J_2 de una sección acanalada respecto del c. d. g. (medidas en centímetros).

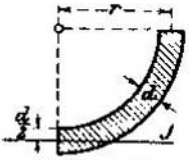


Problema 113

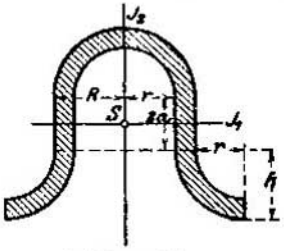
113. Determinar el momento de inercia de un cuarto de anillo circular respecto al eje J.

114. El mismo problema aplicado a la figura correspondiente.

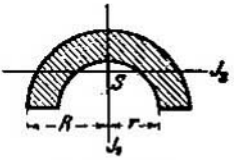
115. Determinar los momentos principales de inercia J_1 y J_2 de la sección representada en la figura respecto de su c. d. g.



Problema 114



Problema 115



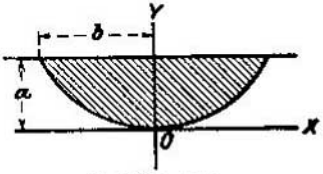
Problema 116

116. Hallar los momentos principales de un semianillo circular respecto a su c. d. g.

117. Hallar el momento de inercia de un segmento circular de ángulo central 2α respecto a la cuerda.

Problema 117

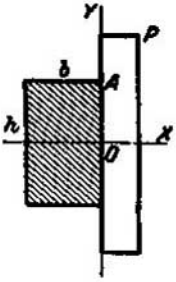
118. Hallar los momentos de inercia de un segmento de parábola respecto a los ejes x e y.



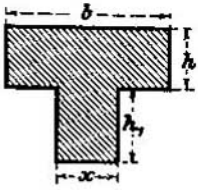
Problema 118

119. Calcular el momento de inercia del área de un anillo elíptico respecto al eje menor $2b$. Se tiene $a = 20$ cm., $b = 15$ cm.; para la elipse interior, $a_1 : a = b_1 : b = 4 : 5$.

120. A una sección rectangular (b, h) se adosa otro rectángulo de modo que no varíe el momento resistente del conjunto respecto al eje Ox. Determinar la ecuación de la curva que contiene al vértice P del rectángulo adosado. Hallar la máxima anchura que puede alcanzar este rectángulo y su altura correspondiente.



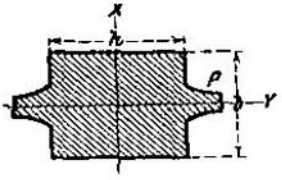
Problema 120



Problema 121

121. A una sección rectangular de dimensiones b y h se adosa por su parte inferior otro rectángulo de altura h_1. El momento resistente de la sección total respecto al eje horizontal de gravedad debe permanecer constante. Hallar la base x del rectángulo añadido.

(G. Singer, ZS d. öst. Ing. u. Arch Ver., tomo 59, pág. 865, 1907.)



122. ¿A qué ley deberá satisfacer la curva que se adosa al rectángulo b, h, con la condición de que el momento resistente W del área rayada respecto al eje x sea constante e igual a $bh^2/6$?
(B. Kirsch, ZVDI tomo 42, pág. 797, 1898.)

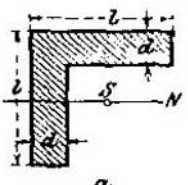
8. Momentos centrífugos y ejes principales

123. Los momentos de inercia de una sección respecto a dos ejes perpendiculares entre sí (que no son ejes de simetría) son iguales. Demostrar que los m. de i. respecto a todas las rectas que pasan por el punto de intersección de dichos ejes son también iguales.

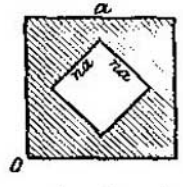
124. Hallar la elipse que, respecto a cualquier eje que pase por su centro, tiene el mismo m. de i. que un rectángulo dado.

125. Se da un anillo circular excéntrico de radios $R = 20$ cm., $r = 10$ cm. y excentricidad $e = 5$ cm. Hallar los m. de i. principales respecto a su c. d. g.

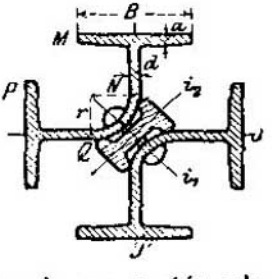
126. ¿Qué relación tienen los ejes de la elipse de inercia respecto del vértice, de un triángulo equilátero?



127. Calcular los m. de i. principales J_1 y J_2 para el c. d. g. de un hierro en ángulo de lados iguales, cuyo espesor d es igual a la cuarta parte del lado l.

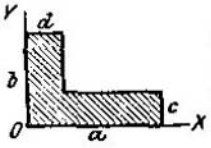


128. Los m. de i. de un cuadrado con un aligeramiento interior en forma de otro cuadrado, respecto al vértice O, deben estar en la relación 1 : 5. ¿Qué valor tendrá n?



129. J. M. Latiner, de Chicago, recomendaba el empleo de columnas de sección formada por dos hierros en I doblados tal como indica la figura. Determinar los m. de i. principales, siendo los datos: B, a, d, la altura primitiva H de los hierros I, el radio r y los m. de i. principales del perfil interior I, i_1, i_2.

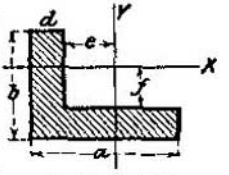
130. Averiguar el momento centrífugo de un rectángulo respecto a dos lados adyacentes.



Problema 131

131. Calcular el momento centrífugo de un hierro en ángulo respecto a los ejes indicados en la figura.

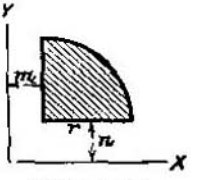
132. Resolver el mismo problema para la figura correspondiente.



Problema 132

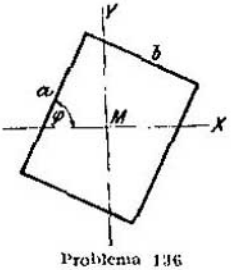
133. Momento centrífugo de un cuadrante de círculo respecto a sus ejes.

134. Resolver el mismo problema para la figura correspondiente.



Problema 134

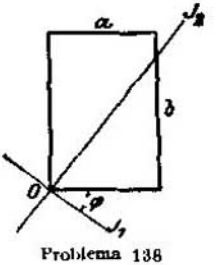
135. Momento centrífugo de un cuarto de elipse respecto a sus ejes.



Problema 136

136. Hallar el momento centrífugo de un rectángulo para dos ejes rectangulares cualesquiera que pasan por su centro.

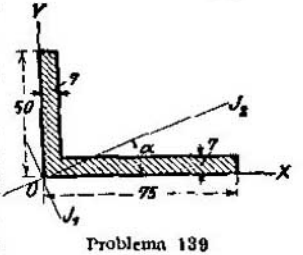
137. Calcular el momento centrífugo de una elipse para dos ejes rectangulares cualesquiera que pasan por su centro.



Problema 138

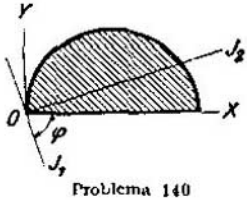
138. Determinar los m. de i. principales J_1 y J_2, así como el ángulo φ para un rectángulo de lados $a = 2$ cm., $b = 3$ cm.

139. Se da la sección de un hierro en ángulo. Determinar para el vértice O los m. de i. J_1 y J_2 máximo y mínimo, así como el ángulo α (medidas en milímetros).



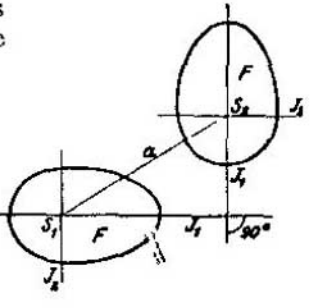
Problema 139

140. Hallar los m. de i. principales J_1 y J_2, así como la posición de los ejes principales para el punto O de un semicírculo.



Problema 140

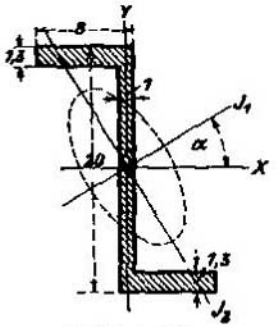
141. La sección de un soporte está compuesta de dos superficies congruentes, separadas, F, cuyos ejes principales de



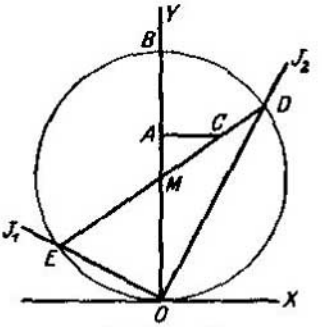
inercia son perpendiculares entre sí, siendo a la distancia entre sus c. d. g. Determinar los m. de i. principales de la sección compuesta para su c. d. g.

(J. Schmidt, ZVDI, tomo 60, pág. 675, 1916.)

142. Hallar la elipse de inercia para el c. d. g. de la sección Z indicada en la figura (medidas en centímetros).

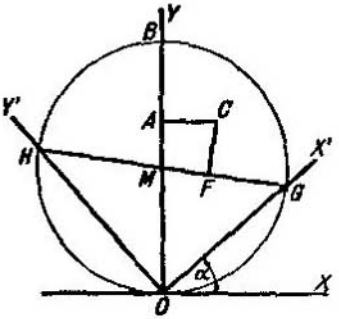


Problema 142



Problema 143

143. Para un punto O de una sección y respecto al sistema de ejes Oxy son conocidos: los m. de i. J_x y J_y y el momento centrífugo J_{xy}. En la dirección de Oy se lleva $\overline{OA} = J_x$, $\overline{AB} = J_y$, y en la de Ox, $\overline{AC} = J_{xy}$. Se traza un círculo sobre $\overline{OB}$ de centro M, y se traza el diámetro DE que pasa por C. Se tiene que $\overline{OD}$ y $\overline{OE}$ son las direcciones de los ejes principales del punto O y, además, $\overline{CE} = J_1$, $\overline{CD} = J_2$ son los m. de i. principales correspondientes. Demostrarlo.



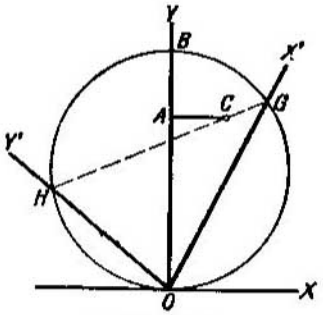
144. Los puntos $OABC$ tienen la misma significación que en el problema anterior. Sea x', y' un nuevo sistema que forma el ángulo α con el anterior. Demostrar que se verifica:

$$\overline{FG} = J_{x'}, \quad \overline{FH} = J_{y'}, \quad \overline{FC} = J_{y'x'}.$$

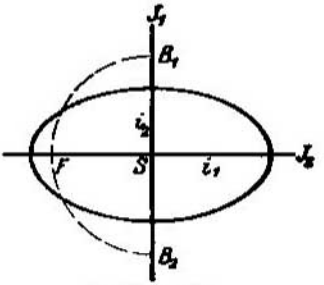
En la figura, $\overline{FC} \perp \overline{GH}$.

(O. Mohr, Zivilingenieur, tomo 33, pág. 43, 1887; R. Land, Zivilingenieur, tomo 34, pág. 123, 1888; ZS. f. Bauwesen, tomo 42, pág. 550, 1892.)

145. Los puntos $OABC$ tienen igual significación que en el problema **143**. Se traza por C una recta arbitraria $\overline{HG}$. Demostrar que el momento centrífugo $J_{x'y'}$ para el sistema (oblicuo) O, x', y' se anula.



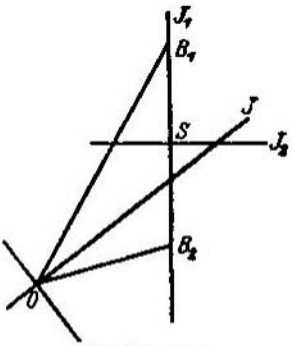
Problema 145



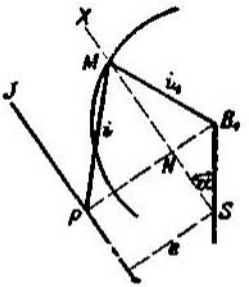
Problema 146

146. Se da la elipse central de inercia de una sección respecto a su c. d. g., cuyos semiejes son i_1, i_2. Se traza una circunferencia de centro S que pase por los focos de la elipse. Los puntos B_1, B_2 tienen la propiedad de que para todas las rectas que pasan por ellos, los m. de i. de la sección son iguales (antifocos). Demostrarlo.

147. Sea O un punto cualquiera de una sección, y B_1, B_2 los antifocos de la elipse central. Demostrar que la bisectriz del ángulo $B_1 O B_2$ es un eje principal del punto O. (O. Mohr.)



Problema 147



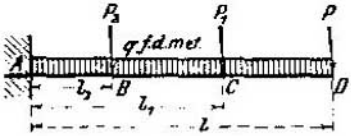
Problema 148

148. S y B_1 son el c. d. g. y el antifoco de una sección cualquiera (véase problema **146**), y J un eje arbitrario. Se traza $B_1 P$ normal a J, Sx paralelo a J y se corta Sx con la circunferencia de centro B_1 y radio i_1 en el punto M. Demostrar que $\overline{MP}$ es igual a i, radio de inercia de la sección respecto al eje J.

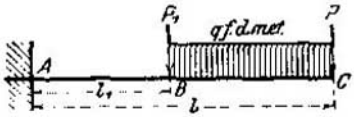
9. Momentos de flexión

Dibujar los diagramas del momento flector en las vigas y para las cargas que se indica en las figuras, y calcular los momentos flectores en los puntos A, B, C. Escribir las ecuaciones de los diversos trozos de las líneas de los momentos flectores.

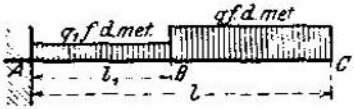
149.



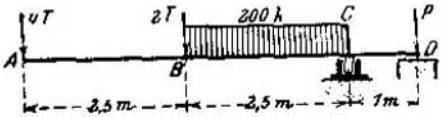
150.



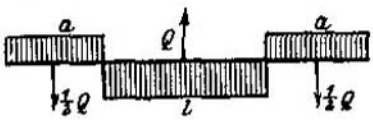
151.



152. La viga de un puente giratorio alrededor del eje vertical C está sometida a la acción de dos cargas concentradas de 4 t y 2 t, y, además entre B y C lleva una carga uniformemente repartida de 200 kg./m. Calcular la fuerza P que ha de actuar en D para que haya equilibrio. Hallar la presión sobre el apoyo C. Dibujar la línea de los momentos de flexión para toda la viga, anotando los valores correspondientes a los puntos B y C.

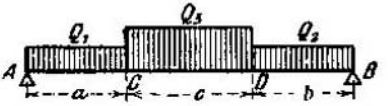


153. Viga sin apoyos con cargas uniformemente repartidas $Q/2$, Q, $Q/2$, que están en equilibrio. Hallar $M_{máx}$.



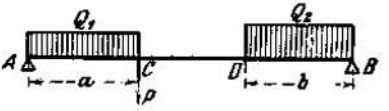
Dibujar los diagramas del momento flector en las vigas y para las cargas que se indican en las siguientes figuras. Calcular las reacciones de los apoyos y la posición y magnitud de los momentos flectores máximos.

154.

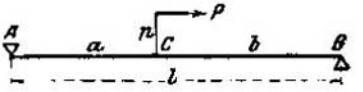


155.

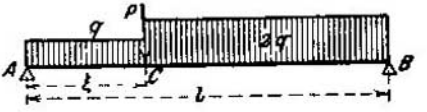
156.



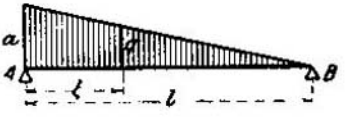
157. Viga con un brazo rígido saliente p, sobre el cual actúa una fuerza axial P. A es un simple apoyo; B, una articulación.



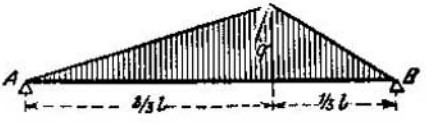
158. Sobre la viga $\overline{AB} = l$ actúa la carga aislada P. Además, existe a la izquierda de P la carga uniformemente repartida q, y a la derecha la $2q$, ambas por unidad de longitud. Calcular a qué distancia ξ de A deberá actuar P para que sea máximo el momento flector en el punto C.



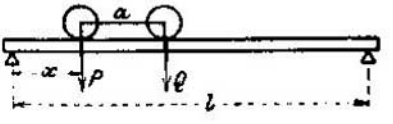
159. Una viga con E y J constantes soporta la carga triangular indicada en la figura. Hallar las reacciones de los apoyos A y B, el momento flector M en una sección cualquiera, la abscisa x_1 de la sección peligrosa y el valor máximo M_1 del momento de flexión.



160. Determinar en la viga y para la carga representadas en la figura el máximo momento flector y su distancia x_1 al apoyo A.

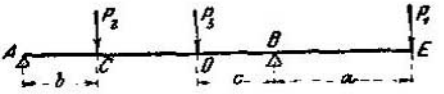


161. Sobre una viga actúa una sobrecarga móvil compuesta de dos fuerzas P y Q, que distan a entre sí. Calcular la posición x de modo que el máximo momento flector se produzca en la sección donde actúa P.

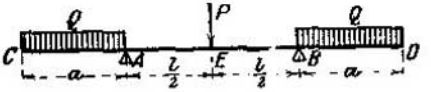


Dibujar las líneas de los momentos de flexión en las vigas y para las cargas que representan las figuras que van a continuación. Hallar la magnitud y las abscisas de los momentos flectores máximos. Determinar los puntos de inflexión (momento flector $M = 0$).

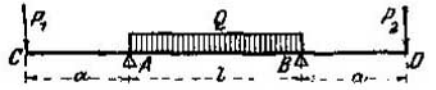
162.



163.

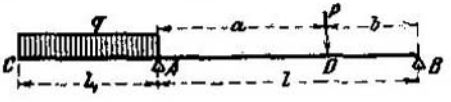


164.

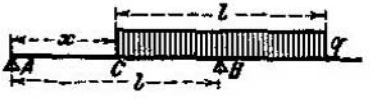


165.

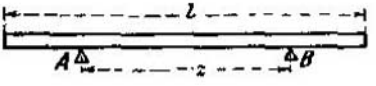
166. La viga $\overline{AB}$ tiene el tramo volado $\overline{CA}$, con la carga indicada en la figura. Hallar la longitud l_1 del tramo volado, bajo la condición de que los momentos flectores en A y D tengan el mismo valor absoluto. Calcular este valor, así como las reacciones de los apoyos A y B.



167. Sobre la viga $\overline{AB} = l$ con un tramo volado actúa una sobrecarga móvil uniformemente repartida de igual longitud l. Determinar la distancia $\overline{AC} = x$, bajo la condición de que los momentos flectores en C y B tengan el mismo valor absoluto. Calcular este valor.



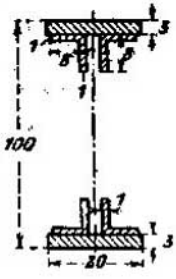
168. Una viga con carga uniformemente repartida debe insistir sobre dos apoyos simétricos A y B. Calcular la distancia z, con la condición de que los coeficientes de trabajo por flexión sean lo más pequeños posible.



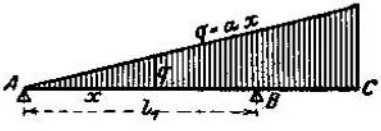
169. La viga $\overline{AC} = l = l_1 + a$, apoyada tal como se indica en la figura, está uniformemente cargada con una carga q por unidad de longitud.

Hallar: *a*) las reacciones de los apoyos en A y B; *b*) la línea de momentos flectores; *c*) los máximos momentos flectores de la viga con sus abscisas; *d*) las secciones de momento nulo.

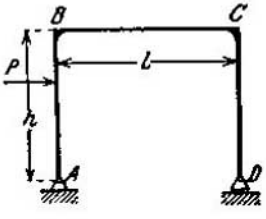
170. La viga del ejemplo anterior tiene la sección compuesta indicada en la figura (medidas en centímetros). Además se dan: el módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^6$ at.; el coeficiente de trabajo por flexión $k'_b = 700$ at., y la longitud de la viga $l = 6$ m. Calcular: *a*) la luz l_1 para que la viga tenga máxima resistencia; *b*) el máximo momento flector y la carga máxima actuante q en kg./m. correspondiente a dicha luz; *c*) las reacciones de los apoyos en A y B.

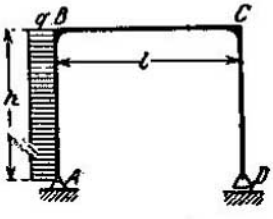


171. Sobre la viga $\overline{AC} = l$ actúa una carga repartida, cuya ecuación es $q = ax$. Calcular: *a*) las reacciones de los apoyos A y B; *b*) los máximos momentos flectores y las secciones a que corresponden; *c*) las secciones de momento nulo.



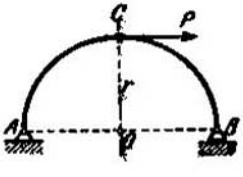
172. 173. Determinar las reacciones de los apoyos y dibujar





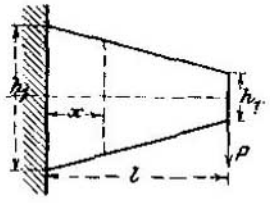
las líneas de momentos flectores en los pórticos isostáticos representados en las figuras, sometidos a las cargas indicadas.

174. Una viga en arco circular (A es una articulación, y B, un simple apoyo, es decir, articulación con deslizadera) está sometida a la acción de una fuerza

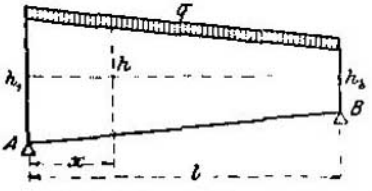


horizontal P que actúa en la clave C. Determinar las reacciones de los apoyos y el diagrama de los momentos de flexión.

10. Tensiones debidas a la flexión y líneas neutras

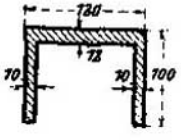


175. Una viga empotrada en un extremo, de longitud l, alturas h_1 y h_2 y ancho b constante (normal al plano del papel), está solicitada en su extremo libre por una fuerza P. Hallar la abscisa x de la sección peligrosa y el momento flector en esa sección. (No se tendrá en cuenta el peso propio.)

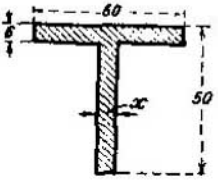


176. La viga representada en la figura, de ancho constante b (normal al papel), está sometida a la acción de la carga uniformemente repartida q. Determinar la abscisa x_1 de la sección de rotura y el momento flector en esta sección.

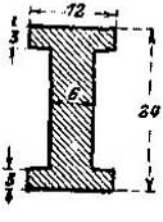
177. Determinar la relación que debe existir entre los coeficientes de trabajo admisibles por compresión k'_d y por tracción k'_t para la sección representada en la figura, bajo la condición de que sea igual la resistencia para ambas clases de esfuerzos. Se supone que la zona de tracciones es la del trasdós. (Medidas en milímetros.)



178. Determinar el espesor (x) del alma del perfil representado en la figura, para que, con un coeficiente de trabajo por tracción $k'_t = 300$ at. y por compresión $k'_d = 800$ at., resulte de igual resistencia a la flexión. La zona de tracciones es la del trasdós. (Medidas en milímetros.)



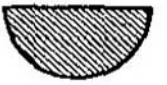
179. Deducir el coeficiente de trabajo por flexión k'_b de la viga de fundición cuya sección se representa en la figura, utilizando la fórmula de Bach (42), siendo el coeficiente de trabajo por tracción $k'_t = 150$ at. (Medidas en centímetros.)



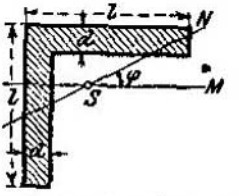
180. Un árbol de fundición tiene una sección anular, cuya relación de diámetros $d/D = \alpha$ se

supone conocida. Calcular el coeficiente de trabajo por flexión k'_b, conocido el de tracción k'_z, haciendo uso de la fórmula de Bach (42).

181. Una barra de fundición tiene la sección semicircular indicada en la figura. La zona de tracciones se supone que es la inferior. Utilizando la fórmula de Bach (42), calcular el coeficiente de trabajo admisible por flexión k'_b, sabiendo que el coeficiente de seguridad es 6 y que la carga de rotura por tracción es $K_z = 1250$ at.

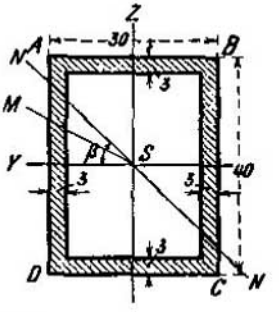


182. Un hierro en ángulo de lados iguales tiene respecto a su c. d. g. los siguientes m. de i. principales: $J_1 = 285$ cm.^{4}, $J_2 = 75$ cm.^{4} El eje SM del momento flector es paralelo a uno de los lados. Determinar el ángulo φ que forma la línea neutra SN con la SM.

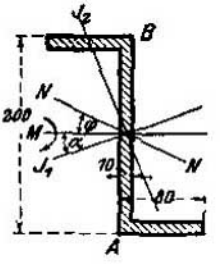


183. El espesor de un hierro en ángulo de lados iguales es $d = l/4$. La fibra neutra SN ha de ser paralela a uno de los lados. Determinar el ángulo φ que forma con el eje del momento flector (véase fig. del problema **127**).

184. La recta SM inclinada 30° respecto a la horizontal es el eje del momento flector $M = 1200$ mkg. que actúa en la sección. Hallar la posición de la fibra neutra o eje de flexión SN y la de las fibras más cargadas, y calcular en ellas los respectivos coeficientes de trabajo. (Medidas en centímetros.)

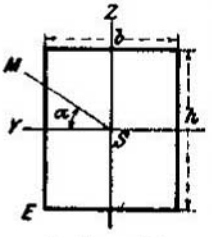


185. Los m. de i. principales de un hierro en Z respecto a su c. d. g. son: $J_1 = 2421$ cm.^{4}, $J_2 = 112$ cm.^{4}, $\alpha = 18° 46' 40''$. El momento flector M actúa siendo su eje la horizontal. Hallar el ángulo φ que forma el eje del momento con la línea neutra NN y la posición de las fibras más cargadas. Determinar el valor de M para que las tensiones o cargas máximas de trabajo no excedan de $k'_b = 700$ at. (Medidas en milímetros.)



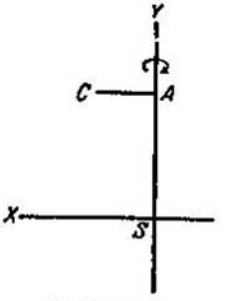
186. La sección rectangular de una viga está solicitada por un momento flector M cuyo eje forma un ángulo α con el lado b del rectángulo. Determinar α, bajo a condición de que el punto

más cargado sea el E (posición más desfavorable de la viga), hallar la carga en ese punto y la posición de la fibra neutra SN en el rectángulo.



Problema 186

187. S es el c. d. g. de una sección; Sx, el eje del momento flector que solicita la sección; además $\overline{SA} = J_x$, $\overline{AC} = J_{xy}$ y $\overline{AC} \perp \overline{SA}$. Demostrar que SC es la dirección de la línea neutra NN de la sección.

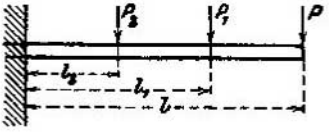


Problema 187

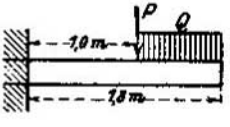
11. La viga empotrada en un extremo

(Dimensiones y flechas)

188. Una viga de madera de sección rectangular está solicitada por las fuerzas $P = 50$ kg., $P_1 = 80$ kg., $P_2 = 100$ kg., que actúan a las distancias $l = 3$ m., $l_1 = 2$ m., $l_2 = 1$ m. del apoyo. Los coeficientes de trabajo admisibles son: por tracción 1/11 de la carga de rotura por flexión $K_b = 470$ at. y por compresión 1/6 de la de rotura por compresión $K_d = 280$ at. Determinar las dimensiones de la sección con la debida seguridad, sabiendo que la relación de la anchura a la altura ha de ser 5 : 7.

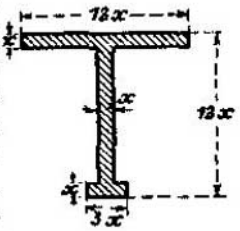


189. Una viga de sección rectangular ($b = 20$ cm., $h = 30$ centímetros) y de longitud $l = 1{,}8$ m. está solicitada en la forma indicada en la figura. La fuerza aislada P es igual a 1000 kg. Determinar el valor de la carga uniformemente repartida Q, bajo la condición de que la tensión no exceda en ningún punto del valor $k'_b = 800$ at.

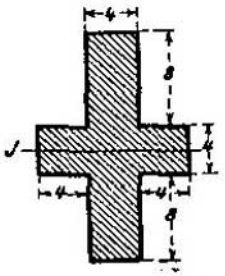


190. Una viga de madera de $l = 3$ m. de longitud y sección rectangular ($b = 20$ cm., $h = 28$ cm.) está empotrada en uno de sus extremos. Determinar la fuerza P que puede soportar en el extremo libre con la debida seguridad: *a*) colocándola de canto, o sea b vertical; *b*) colocándola de plano o costado, o sea b horizontal. No se tendrá en cuenta el peso propio. Coeficiente de trabajo admisible por flexión $k'_b = 44$ at.

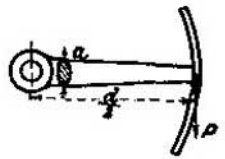
191. Una viga empotrada en uno de sus extremos de luz $l = 3$ m., sección indicada en la figura y peso específico $\gamma = 7{,}5$, debe soportar en su extremo libre y con la debida seguridad una carga concentrada $P = 3000$ kg. Los coeficientes de trabajo admisibles son 300 at. por tracción y 800 at. por compresión. Determinar x, teniendo, además, en cuenta el peso propio.



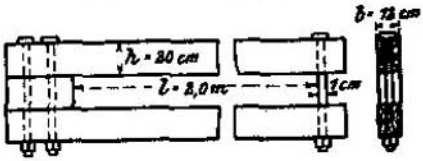
192. Los radios de una polea tienen sección cruciforme (medidas en centímetros) y una longitud de 0,5 m. Uno de los extremos va fijo al eje y el otro está solicitado por la fuerza tangencial P que actúa en la llanta. Determinar P, siendo el coeficiente de trabajo por flexión $k_b' = 200$ at.



193. Una polea de hierro, de diámetro $d = 0{,}4$ m., da $n = 60$ revoluciones por minuto y transmite una potencia $N = 12$ CV. Tiene cuatro radios o brazos de sección elíptica, y la relación de los ejes de la elipse es $a : b = 2 : 1$. El coeficiente de trabajo admisible por tracción es $k_z' = 150$ at. Calcular las dimensiones a y b de la sección de los radios teniendo en cuenta el valor que debe tener el coeficiente admisible por flexión, en la fundición.

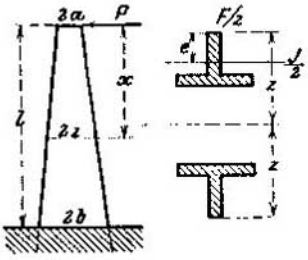


194. Dos vigas de madera de las mismas dimensiones tienen uno de sus extremos reunidos por medio de un bloque intermedio y por el otro extremo están enlazadas por un perno de 1 cm. de diámetro. Al apretar la tuerca de este perno, ¿qué ocurrirá antes: la rotura de las vigas o la del perno? (Carga de rotura por flexión de la madera, $K_b = 470$ at.; carga de rotura por tracción del hierro, $K_z = 4000$ at.)



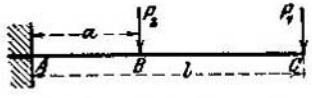
195. Un poste telegráfico de $l = 10$ m. de longitud libre debe resistir una presión de viento de 125 kg./m.^{2} con una seguridad de 10. La carga de rotura por flexión es 420 at. y la presión del viento ha de estimarse (según v. Lössl) sobre 0,785 de la sección longitudinal del poste. Calcular el diámetro d del mismo.

196. Un poste de conducción de energía tiene la anchura



variable $2z$; su sección (compuesta) está formada por hierros en T (véase la figura) y su anchura en el extremo superior es $2a$. Está solicitado por la fuerza horizontal P que actúa en el extremo superior. Determinar la sección peligrosa en posición y magnitud.

(F. Hartmann, ZS. d. öst. Ing. u. Arch.-Ver., tomo 61, página 271, 1909.)



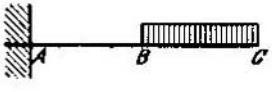
197. Determinar la flecha en el extremo C de una viga solicitada, tal como indica la figura, por las fuerzas P_1 y P_2.

197 a. Resolver el problema anterior sin hallar las elásticas, sólo con ayuda de la tabla 1.

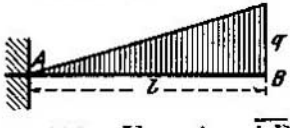
197 b. Resolver este problema aplicando el teorema de Mohr.

198. Una viga empotrada en un extremo de longitud l está solicitada en el extremo libre por un momento M. Calcular la flecha f_B y la inclinación ψ_B de la elástica en el punto B.

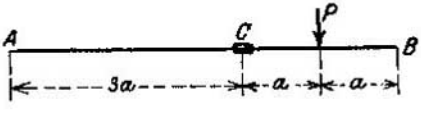
199. Una viga $\overline{AC} = l$ está cargada desde el punto medio B hasta el extremo libre C con una carga uniformemente repartida q por unidad de longitud. Calcular la flecha f y la inclinación de la viga ψ en el punto C.



200. Hallar la flecha en el extremo libre de la viga $\overline{AB} = l$ solicitada por una carga repartida que crece linealmente desde el empotramiento A hasta el extremo libre B (carga triangular).

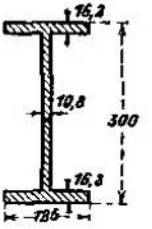


201. Una viga $\overline{AB}$ de peso G está empotrada en C y solicitada en el punto medio del tramo menor por la fuerza P. Determinar P, bajo la condición de que las flechas de los puntos A y B sean iguales.



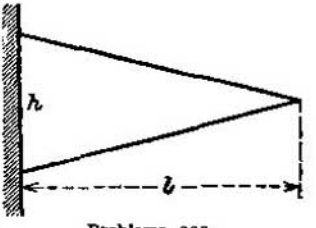
201 a. Una viga empotrada en un extremo, formada por

el perfil I indicado en la figura, debe tener una longitud tal que por efecto del peso propio, la flecha en su extremo libre sea $f = 2$ cm. Determinar dicha longitud. (Peso específico, $\gamma = 7{,}8$; módulo de elasticidad, $E = 2 \cdot 10^6$ at.; medidas en milímetros.)



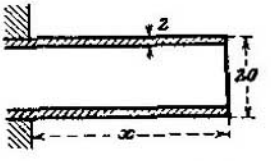
202. Un cono truncado cuyo contorno lateral es igual al de la figura del problema **175** está cargado en la misma forma que la viga de dicho problema. Hallar la flecha en el punto de acción de la carga sin tener en cuenta el peso propio.

203. Un cono circular con el eje horizontal está empotrado por su base. Hallar la flecha correspondiente al vértice por efecto del peso propio.



Problema 203

204. Un tubo de hierro de sección circular (medidas en centímetros) lleno de agua sobresale del muro una longitud x. La flecha de la sección libre debe ser, a lo sumo, 5 mm. Determinar x. (Módulo de elasticidad, $E = 2 \cdot 10^6$ at.; peso específico del hierro, $\gamma = 7{,}8$.)



205. Con una cierta cantidad de material hay que fabricar una viga de sección circular que, empotrada en un extremo y solicitada en el otro por una fuerza, acuse una flecha mínima. Hallar la ley de variación del diámetro z de la sección a lo largo de la viga.

(H. Blasius, ZS. f. Math. u. Phys., tomo 62, pág. 182, 1914.)

12. La viga simplemente apoyada

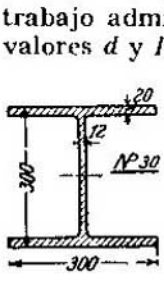
(Dimensiones y flechas)

206. Una viga $\overline{AB} = l$ está cargada en el trozo $\overline{AC} = 2l/3$ con una carga uniformemente repartida q por unidad de longitud. ¿A qué distancia x de A se encuentra la sección peligrosa? ¿Qué valor tiene en ella el momento flector?

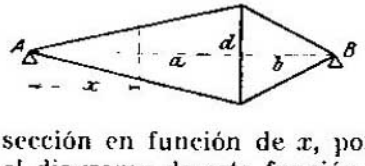
207. Una viga de fundición de 5 m. de luz está solicitada por las fuerzas que se indican en la figura; su sección es un anillo

circular cuya relación de diámetros interior y exterior es $d : D = 6 : 10$. El coeficiente de trabajo admisible por tracción es $k'_z = 300$ at. Calcular: *a*) las reacciones de los apoyos A y B; *b*) los momentos flectores en C, D y E; *c*) el coeficiente de trabajo admisible por flexión k'_b; *d*) teniendo en cuenta k'_b, los valores d y D. (No se tendrá en cuenta el peso propio.)

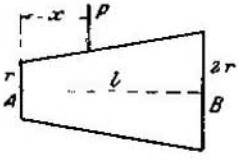
208. Un perfil normal I n.° 30 de alas anchas (Differdinger) cuyo $W = 1717$ cm.³, tiene una longitud de 5 m. y está simplemente apoyado en sus extremos. Determinar la carga P que puede actuar a la distancia 2 m. de uno de los apoyos sin que la carga de trabajo por flexión exceda de $k'_b = 750$ at. (No se tendrá en cuenta el peso propio.)



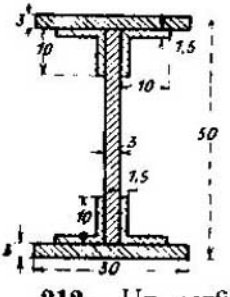
209. Un doble cono de las dimensiones indicadas en la figura y de peso específico γ se apoya por sus vértices. Determinar la máxima tensión o carga de trabajo en una sección en función de x, por efecto del peso propio, y dibujar el diagrama de esta función.

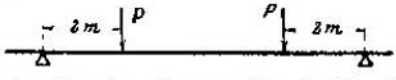


210. Un tronco de cono de longitud l y de radios r y $2r$ se apoya en A y B, y está sometido a la acción de la fuerza aislada P. Determinar la abscisa x_1 de P que produce las tensiones máximas, y hallar el valor de éstas.



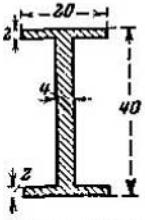
211. Una viga de 8 m. de luz y de la sección indicada en la figura está solicitada por una carga uniformemente repartida de 4000 kg./m. y por dos fuerzas aisladas P simétricamente situadas a $a = 2$ m. de los apoyos. Determinar P, con la condición de que la carga de trabajo no exceda del valor $k'_b = 1360$ at. (Medidas en centímetros.)





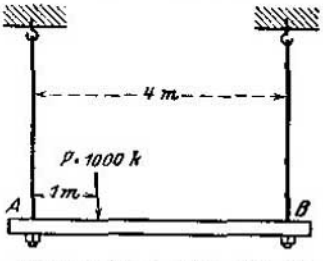
212. Un perfil laminado, de sección indicada en la figura, se coloca primeramente de canto, es decir, apoyado en la cabeza

de 20 cm. de ancho, y después de plano, esto es, de modo que la altura de 40 cm. quede horizontal. Hallar la longitud necesaria en cada uno de estos casos para que la viga se rompa por efecto de su propio peso. (Carga de rotura por flexión, $K_b = 5000$ at.; peso específico, $\gamma = 7{,}8$. Medidas en centímetros.)

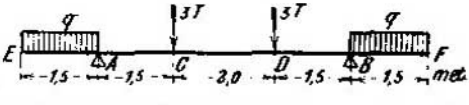


213. Un tubo de fundición de 20 cm. de diámetro exterior y 1 cm. de espesor, lleno de agua, se apoya simplemente por sus extremos. Hallar la luz máxima que puede salvar para que la carga de trabajo no exceda en ningún punto de 300 at. (Peso específico de la fundición, $\gamma = 7{,}5$.)

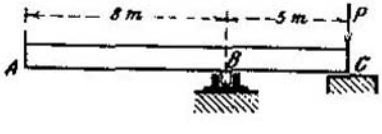
214. Una viga de madera $\overline{AB}$ de sección cuadrada s^2 y 4 m. de luz está solicitada a la distancia 1 m. del apoyo por una fuerza aislada de 1000 kg. La viga está colgada en los apoyos A y B, de dos barras de hierro. Calcular el lado s de la viga y los diámetros d_1, d_2 de ambas barras, siendo $k'_b = 70$ at. el coeficiente de trabajo por flexión de la madera y $k'_2 = 700$ at. el de tracción del hierro.

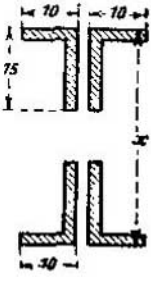


215. Una viga de madera de 8 m. de longitud está simplemente apoyada por sus puntos A y B. Entre éstos, está solicitada por dos fuerzas aisladas de 3 t., que actúan simétricamente, y en los tramos volados, por cargas uniformemente repartidas de $q = 1{,}2$ t./m. Calcular: *a*) las reacciones de los apoyos en A y B; *b*) los momentos flectores en A y C; *c*) la sección de la viga donde el momento flector es nulo; *d*) las dimensiones de la viga, siendo $b : h = 5 : 7$, y el coeficiente de trabajo por flexión $k'_b = 60$ at. Dibujar el diagrama de los momentos flectores.

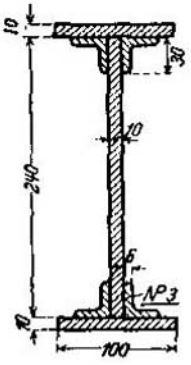


216. Un puente giratorio ABC de 13 m. de longitud, que puede girar alrededor de B, está simplemente apoyado en el punto C. Está solicitado por una carga uniformemente repartida de $q = 2$ t./m. Su sección se compone de cuatro hierros en ángulo

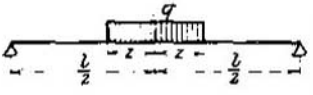




iguales (véase la figura, cuyas medidas están en centímetros; se supone la sección compuesta) de 1,4 cm. de espesor. Determinar: *a*) la fuerza P que ha de actuar en C para que haya equilibrio; *b*) la presión en el punto B; *c*) el máximo momento flector y la sección peligrosa; *d*) la altura x de la sección para $k'_b = 800$ at.



217. La sección de una viga simplemente apoyada es la que se indica en la figura. La distancia del c. d. g. de los hierros de ángulo al canto paralelo es 9,6 mm., su momento de inercia respecto a su eje de gravedad es 2,49 cm.^{4}, y su sección, 3,27 cm.^{2} El peso específico del acero es 7,85 kg./dm.^{3} La viga está solicitada por su propio peso y, además, por una carga uniformemente repartida de 255,1 kg./m. Calcular la luz, bajo la condición de que la flecha máxima no exceda de 5 mm.

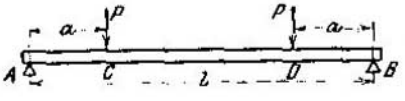


218. Una viga cuyo momento resistente W es conocido está solicitada por la carga uniformemente repartida que se indica en la figura. Hallar la longitud $2z$ a que ha de extenderse la carga para que el coeficiente de trabajo por flexión sea k'_b.

---

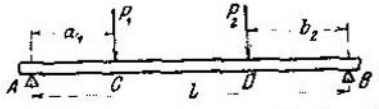
219. Una viga $\overline{AB} = l$ está solicitada solamente por dos momentos iguales y de sentido opuesto que actúan en sus extremos. Calcular la inclinación de la viga en los apoyos y la flecha en el punto medio.

220. Una fuerza móvil se desplaza a lo largo de una viga. Hallar las máximas flechas de la misma.



221. Una viga está solicitada por las dos fuerzas iguales P de posición simétrica. Hallar la flecha en el punto medio de la viga.

222. Sobre una viga de luz l actúan las dos fuerzas P_1 y P_2 de abscisas arbitrarias a_1 y b_2. Determinar las flechas f_1 y f_2 de la viga en los puntos C y D.



223. En el problema anterior, hallar el punto de la viga, que tiene la flecha máxima, primero de modo general y luego para los datos $P_1 = 16$ t., $P_2 = 20$ t., $l = 3{,}2$ m., $a_1 = 0{,}8$ m., $b_2 = 1$ m.

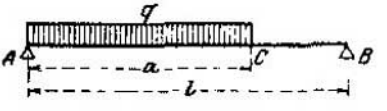
224. ¿Qué relación deberán tener las cargas P_1 y P_2 del problema **222** para que la flecha máxima corresponda al punto medio? Hallar el valor de esa flecha. Resolver el problema en general y después particularmente para $a_1 = l/4$, $b_2 = l/5$.

225. Una viga cuyo eje divide en dos mitades a su altura y de luz l, está cargada de un modo uniforme. Se mide la flecha en el punto medio. Hallar la tensión o carga máxima de trabajo en la misma.

226. Expresar la relación entre las máximas flechas de dos vigas de sección rectangular y del mismo material en función solamente de sus longitudes (l_1, l_2) y alturas (h_1, h_2), sabiendo que las cargas uniformemente repartidas que las solicitan dividen a las respectivas longitudes en la misma relación y que producen tensiones máximas iguales.

227. Una viga de madera de luz $l = 4$ m. y sección rectangular está solicitada por una fuerza $P = 800$ kg. cuya abscisa es $a = 1$ contada desde el apoyo. El ancho b de la viga es $^5/_7$ de la altura h. La carga de rotura por flexión de la madera es 670 atmósferas y se desea una seguridad igual a 11. Calcular: *a*) las dimensiones b y h; *b*) los ángulos de inclinación ψ_A y ψ_B de la viga en los apoyos A y B; *c*) la flecha f en el punto de acción de P; *d*) la máxima flecha de la viga y su abscisa respecto al apoyo A. (Módulo de elasticidad, $E = 128\,000$ at.)

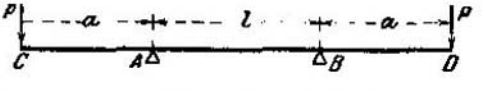
228. Una viga que salva una luz l está solicitada por una carga uniformemente repartida que se extiende en una longitud a contada desde el apoyo. Calcular la flecha máxima y el punto a que corresponde.



229. ¿Hasta qué valor de a en el problema anterior, la flecha máxima corresponde al trozo $\overline{AC}$, y para qué valor de a corresponde precisamente el punto C?

230. En la viga del problema **228**, la carga uniformemente repartida se traslada de manera que su extremo C recorre el camino $\overline{AB}$, y así al llegar al punto B toda la viga está solicitada por la carga. ¿Qué camino describe el punto donde tiene lugar la máxima flecha?

231. Una viga con dos tramos volados iguales está solicitada en sus extremos por dos fuerzas P. Determinar la relación $a/l = z$ bajo la con-

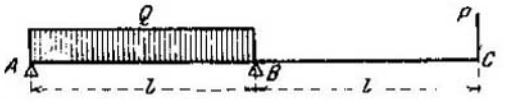


dición de que sean iguales en valor absoluto las flechas correspondientes al punto medio y a los extremos de la viga.

232. Calcular la flecha en el punto medio de la viga del problema anterior utilizando la fórmula más exacta (40) y la diferencia que resulta comparándola con el cálculo hecho por la fórmula aproximada (41).

233. Determinar la distancia z entre apoyos de la viga del problema **168**, con la condición de que la viga sea horizontal en los puntos de apoyo.

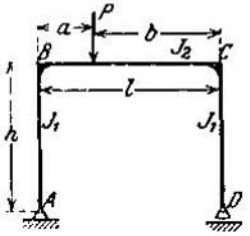
234. La viga $\overline{AC} = 2l$ está apoyada en A y B. El tramo $\overline{AB}$ está sometido a la acción de la carga uniforme Q, y la fuerza aislada P actúa en el extremo C. Calcular la relación que deben tener P y Q para que la flecha del punto C sea nula.

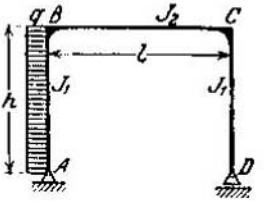


235. Hallar la ecuación de la línea elástica de la viga del problema **169**.

236. Calcular la elevación de la viga del problema **169**, correspondiente al punto C, con las condiciones fijadas para el problema **170**.

237. 238. Determinar el desplazamiento de la articulación móvil D de los pórticos representados en las figuras que van a continuación, solicitados por las cargas que se indican en las mismas.





13. Vigas de igual resistencia a la flexión

239. Una viga empotrada por un extremo, de luz l, y de altura h en la sección de empotramiento, solicitada por una carga uniforme Q, debe tener la forma de sólido de igual resistencia a la flexión. El ancho b de la viga es constante y el coeficiente de trabajo por flexión vale k_b'. Hallar la ley de variación de la altura z.

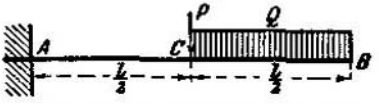
240. Resolver el mismo problema anterior, pero siendo en este caso constante la altura h. Hallar la ley de variación del ancho

y, siendo b el correspondiente a la sección del empotramiento.

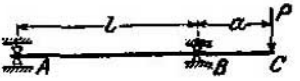
241. Una viga empotrada en uno de sus extremos está solicitada en el otro por la fuerza P. Su forma debe ser de igual resistencia a flexión y sus secciones rectangulares han de ser semejantes a la de empotramiento (b, h). Hallar las leyes de variación del ancho y y altura z de la sección.

242. Una viga empotrada en un extremo, de sección rectangular, está solicitada por una fuerza P que actúa en el extremo libre. La anchura b es constante y la viga ha de ser de igual resistencia a la flexión. Hallar la ecuación de la línea elástica.

243. Una viga empotrada en un extremo y sometida a la carga indicada en la figura tiene secciones de forma rectangular. Su altura h es constante. Determinar la ley de variación del ancho z en función de la distancia x al apoyo, siendo la viga de igual resistencia a flexión y siendo b el ancho en la sección de empotramiento. Calcular la anchura b_1 correspondiente al punto medio de la viga.



244. Una viga con tramo volado está solicitada en el extremo C por la fuerza P. Su sección es un círculo de diámetro variable d. Hallar la ley de variación de d a lo largo de la viga para que sea de igual resistencia a flexión, y calcular los valores máximo y mínimo del diámetro.



245. Una viga simplemente apoyada soporta la carga triangular representada en la figura. Su sección es un cuadrado de lado variable y. Hallar la ley de variación de y en función de x para que la viga sea de igual resistencia a la flexión, siendo dado el lado h del cuadrado en la sección de rotura.

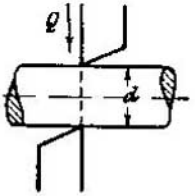
246. Un eje de diámetro variable δ y luz l está simplemente apoyado en sus extremos y cargado en su punto medio con la fuerza P. Su forma ha de ser de igual resistencia a la flexión. Hallar la flecha correspondiente al punto medio.

247. Una viga empotrada en un extremo está solicitada por su propio peso y por una fuerza aislada que actúa en el extremo libre. Su sección ha de ser rectangular de anchura constante b y altura variable z. Hallar la ecuación diferencial de la altura z en función de la distancia x al extremo libre, para que la viga sea de igual resistencia a la flexión.

(H. Blasius, ZS. f. Math. u. Phys., tomo 62, pág. 182, 1914.)

IV. Esfuerzo cortante y torsión

14. Esfuerzo cortante y puro



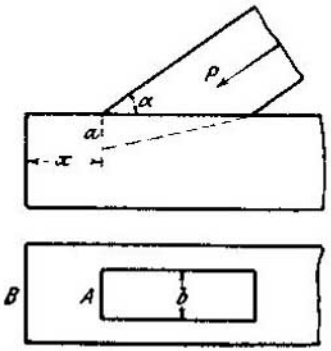
248. Determinar el esfuerzo cortante Q que deben desarrollar las cuchillas de una tijera para partir un hierro redondo de 4 cm. de diámetro, sabiendo que la carga de rotura por esfuerzo cortante es $K_s = 3500$ at.

249. Determinar el coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante k'_s, del acero semiduro, sabiendo que las fuerzas solicitantes de tracción y compresión oscilan entre valores iguales y que el coeficiente de Poisson es $m = 10/3$.

250. Una barra redonda de hierro dulce debe resistir con seguridad un esfuerzo cortante fijo de 40 t. Hallar el diámetro de la barra.

251. Determinar el valor del esfuerzo cortante necesario para partir una viga de madera de encina de 20 cm. de anchura y 30 cm. de altura, sabiendo que la carga de rotura para dicho esfuerzo es $K_s = 74$ at.

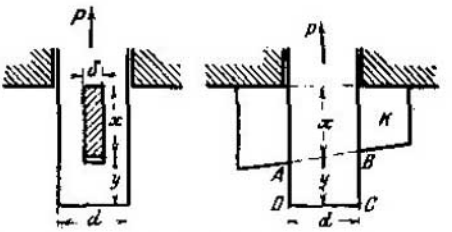
252. Un bloque de fundición de sección rectangular ha de resistir un esfuerzo cortante de 80 t. con un coeficiente de seguridad a 8. La carga de rotura K_r de la fundición por tracción es igual a 1250 at. El bloque tiene 40 cm. de altura. Determinar su anchura.



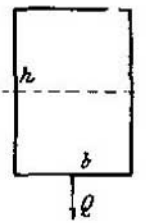
253. Un par de madera inclinado $\alpha = 30°$ y sometido a la acción de la fuerza $P = 2000$ kg. se ensambla a caja y espiga con una viga horizontal del mismo material. La fuerza P tiende a desgarrar el trozo de viga comprendido entre A y B. Calcular la longitud x necesaria para evitar el desgarramiento, sabiendo que la profundidad a de la caja es igual a 4 cm., su anchura $b = 6$ cm. y que

el coeficiente de trabajo de la madera por esfuerzo cortante es $k'_s = 6$ at.

254. Un perno de sujeción de diámetro $d = 50$ mm. está sometido a la acción de una fuerza de tracción P y está sujeto por medio de una chaveta que atraviesa una ranura cuyo ancho es $\delta = 12$ mm. Calcular las dimensiones x, y y la carga admisible P, siendo los coeficientes de trabajo del material $k'_t = 1000$ at. por tracción y $k'_s = 780$ at. por esfuerzo cortante.



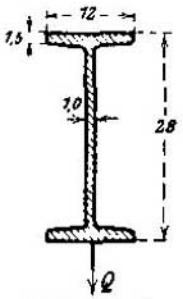
255. El valor medio de las tensiones tangenciales en una sección rectangular de dimensiones $b\,h$ es $\tau = \frac{Q}{bh}$, siendo Q el esfuerzo cortante. Averiguar si efectivamente existen puntos en la sección en los que reine esta tensión.



256. Una sección de forma elíptica y de superficie dada F está sometida a la acción de un esfuerzo cortante Q. Determinar la relación de los ejes de la elipse para que la máxima tensión tangencial de la sección sea lo más pequeña posible.

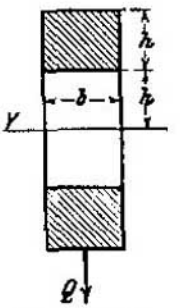
257. Una sección circular está sometida a la acción de un esfuerzo cortante Q. Hallar el lugar geométrico de los puntos P de la sección para los cuales la tensión tangencial es $1/n$ de la tensión máxima de la sección.

258. Hallar el valor del esfuerzo cortante Q que puede resistir el perfil de hierro representado en la figura, sabiendo que el coeficiente de trabajo del hierro por tracción vale $k'_t = 1000$ at. (Las medidas de la figura son centímetros.)

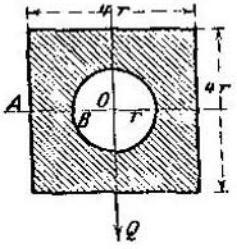


Problema 258

259. Una sección compuesta de dos rectángulos separados (geométricamente), pero enlazados entre sí rígidamente, está sometida a la acción del esfuerzo cortante Q. Determinar el valor de la máxima tensión tangencial y los puntos en que actúa.

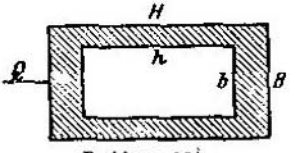


Problema 259



Problema 260

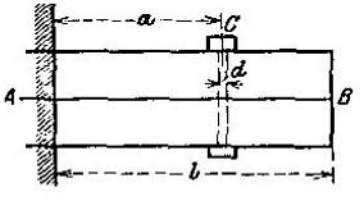
260. El esfuerzo cortante Q actúa sobre la sección representada en la figura formada por un rectángulo con un hueco interior circular. Determinar la tensión tangencial en un punto de la fibra AB.



Problema 261

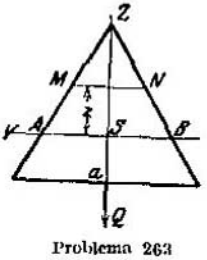
261. Sobre el anillo rectangular F representado en la figura actúa el esfuerzo cortante Q. Determinar la sección reducida F_0 correspondiente al cálculo de la máxima tensión tangencial, sabiendo que $b : B = h : H = n : 1$. [Véase fórmula (49).]

262. Una viga empotrada en uno de sus extremos, de sección rectangular de altura h y peso G, está dividida en dos partes por su plano medio $\overline{AB}$. Ambas partes se unen entre sí por medio de un perno de hierro cuyos extremos se sujetan perfectamente con las correspondientes tuercas. Hallar el diámetro que ha de tener el perno partiendo del coeficiente del hierro por tracción k'_z. (Sin tener en cuenta el rozamiento.)

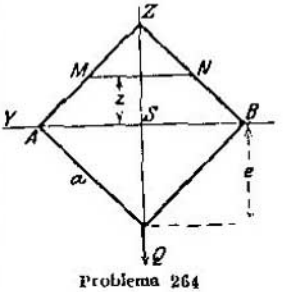


263. Un triángulo equilátero está sometido a la acción del esfuerzo cortante Q. Hallar la tensión tangencial en los puntos A y B. ¿A qué puntos corresponde la tensión máxima y cuál es su valor?

264. El esfuerzo cortante Q actúa sobre el cuadrado representado en la figura en la dirección de una diagonal. Determinar la posición y magnitud de la máxima tensión tangencial en el contorno o borde del cuadrado, así como las tensiones en los puntos A y B.



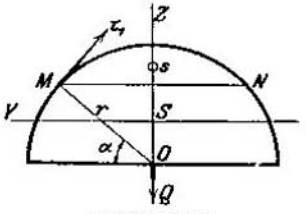
Problema 263



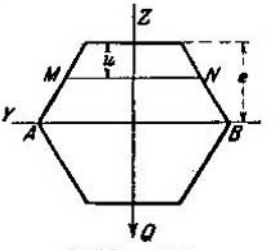
Problema 264

265. Una sección semicircular está sometida a la acción del esfuerzo cortante Q. Calcular la tensión tangencial τ_1 en un punto cualquiera del contorno. Hallar el ángulo α correspondiente al máximo de τ, y calcular este valor.

266. El esfuerzo cortante Q actúa sobre una sección hexagonal. Determinar la fibra $\overline{MN}$, para la cual las tensiones tangenciales son máximas, y hallar su valor.

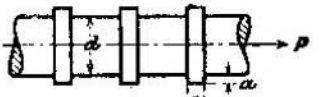


Problema 265

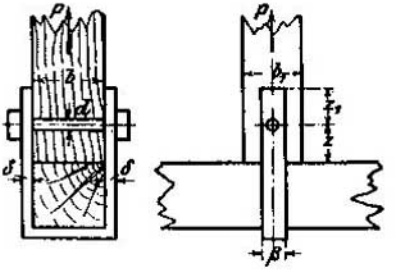


Problema 266

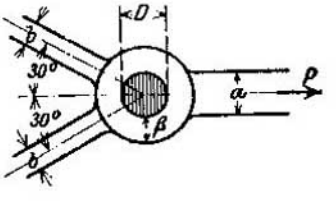
267. Un árbol de anillos está sometido a la acción de una presión axial P. Determinar el diámetro del árbol y la anchura b de los anillos, sabiendo que $a = d/8$ y n = número de anillos, y suponiendo que la fuerza P se reparte uniformemente entre todos los anillos. (Los coeficientes de trabajo admisibles por compresión k'_d y por esfuerzo cortante k'_s se suponen dados.)



268. Sobre un pendolón de madera de anchura $b = 10$ cm. actúa el esfuerzo de tracción $P = 5500$ kg. Este pendolón se sujeta a una viga por medio de un hierro plano de espesor $\delta = 15$ milímetros y un perno de diámetro d sujeto por tuercas. Los coeficientes de trabajo admisibles son: para el hierro por tracción, $k'_t = 750$ at.; por esfuerzo cortante, $k'_s = 600$ at.; para la madera por tracción, $k''_t = 100$ at.; por esfuerzo cortante, $k''_s = 10$ atmósferas. Calcular: *a*) el diámetro d del perno; *b*) la anchura b_1 del pendolón; *c*) la anchura β del hierro plano; *d*) las distancias z y z_1.

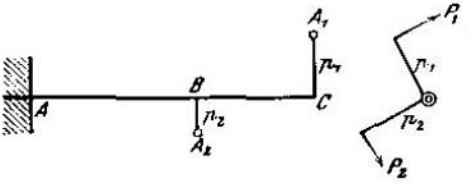


269. Tres barras rectangulares de acero dulce y de espesor $d = 4$ cm. (normal al papel) están unidas entre sí por medio de un perno de diámetro D. Sobre la barra de en medio actúa



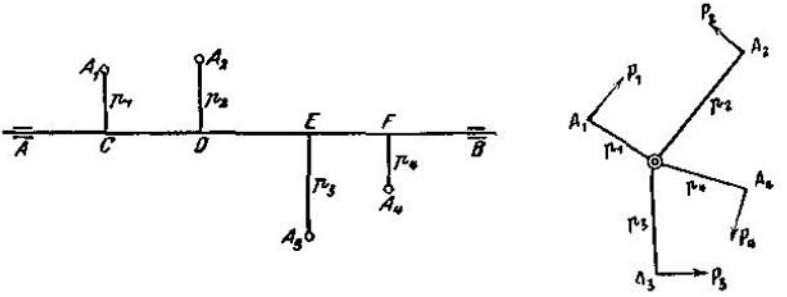
una fuerza que oscila entre 8000 kg. de compresión y 20 000 kg. de tracción. Calcular las dimensiones a y b de las barras, el diámetro D del perno y el grueso del anillo β de las barras.

15. Torsión



270. Una barra empotrada en un extremo (asegurada contra la flexión) está sometida al esfuerzo de torsión que producen las dos fuerzas P_1 y P_2 representadas en la figura. Dibujar el diagrama de los momentos de torsión.

271. Un árbol de transmisión, guiado en sus extremidades,



está sometido a torsión por las cuatro fuerzas P que actúan en los puntos A. Dibujar el diagrama de los momentos torsores.

272. Un árbol de transmisión de sección circular lleva una rueda de 1,2 m. de diámetro, en cuya llanta actúa una fuerza de 1860 kg. Determinar el diámetro del árbol, siendo el coeficiente de trabajo 450 at.

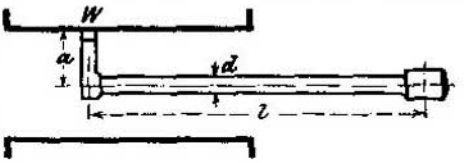
273. La tensión de torsión de un árbol de longitud l y diámetro d debe alcanzar, a lo sumo, el valor k_t'. Calcular el valor máximo a que podrá llegar el ángulo total de torsión.

274. Una barra de acero de sección rectangular (4×8 cm.) está solicitada en su extremo por un par o momento de torsión $M_t = 162$ mkg. Determinar la longitud l de la barra, bajo la condición de que el ángulo total de giro valga a lo sumo 3°. (Módulo de elasticidad al esfuerzo cortante, $G = 850\,000$ at.)

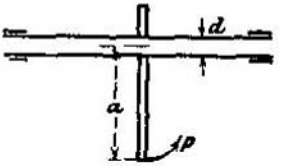
275. Una barra de acero debe tener la longitud conveniente para que, al girar una de sus secciones extremas un cuarto de vuelta respecto a la otra, la carga admisible de 900 at. no sea

rebasada en ningún punto. Hallar la relación de la longitud de la barra con su diámetro. (G como antes.)

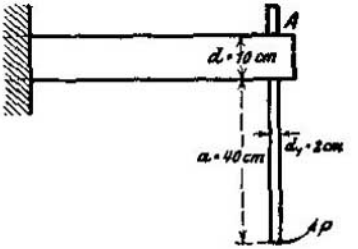
276. La resistencia W que debe vencer la barrena de una máquina de mandrilar vale 1000 kg. El radio del cilindro que se ha de mandrilar es $a = 200$ mm., y la longitud del eje de la barrena, $l = 1{,}2$ m. Calcular su diámetro d, sabiendo que el ángulo total de giro no ha de exceder de $\frac{1}{2}°$. (Módulo de elasticidad al esfuerzo cortante, $G = 770\,000$ at.)



277. Un árbol de sección circular de $d = 5$ cm. de diámetro está sometido a la torsión producida por una fuerza P que actúa en el extremo de un brazo $a = 0{,}8$ m. perpendicularmente al brazo y al árbol. Hallar el máximo de P, bajo la condición de que el coeficiente de trabajo no pase de $k_t' = 500$ at. en ningún punto del árbol.

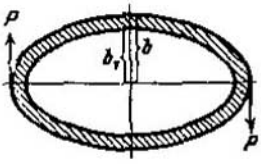


278. Por el extremo de un rollizo de madera de 1 m. de longitud y 10 cm. de diámetro se atraviesa un hierro cuadrado de 2 cm. de lado formando un brazo de 0,4 m. de longitud. En el extremo de este brazo actúa una fuerza P perpendicular al mismo y al rollizo. Determinar la fuerza P: a) primeramente para que se produzca la rotura del rollizo ($K_t = 42$ at.), y b) para que se rompa el cuadradillo de hierro ($K_b = 5000$ at.) ¿Cuál de los dos se romperá primero?



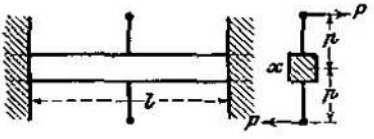
279. Una barra de acero, de sección elíptica (ejes de la elipse, $b = 5$ cm. y $c = 8$ cm.), debe ceder a la torsión, por efecto de un par M_t. Determinar su valor, sabiendo que la resistencia máxima de torsión para el acero fundido es $K_t = 4000$ at.

280. Una barra de hierro, de sección elíptica ($\alpha = b_1/b = 0{,}8$), está sometida en los extremos del eje mayor $2c$ al efecto de dos fuerzas iguales y opuestas P



= 1800 kg. Calcular la dimensión b del eje menor, bajo la condición de que el coeficiente de trabajo no rebase del admisible $k_t' = 500$ at.

281. Una barra de hierro de $l = 3$ m. de longitud y sección cuadrada está sometida a torsión por efecto de dos fuerzas $P = 100$ kg. que actúan en su punto medio con brazos $p = 1$ m. El coeficiente de trabajo admisible por torsión es $k_t' = 120$ at. Calcular el lado x del cuadrado y el ángulo de giro de la seccion media. (Módulo de elasticidad al esfuerzo cortante, $G = 770\,000$ at.)



282. Determinar la relación entre los ángulos totales de giro ϑ_1 y ϑ_2 de dos barras que tengan la misma longitud, volumen y material y que estén sometidas al mismo momento torsor, siendo una de ellas de sección cuadrada y la otra circular.

283. Determinar para una sección eliptica de semiejes b y c, sometida a torsión, todos los puntos que tienen la misma tensión que los extremos del eje mayor $2c$.

284. Un par de torsión M_t actúa sobre una barra de sección elíptica. La máxima y mínima carga de trabajo en el perímetro de la elipse están en la relación $n : 1$. Calcular la relación entre los ejes b y c de la elipse.

285. Un árbol de sección circular que da n revoluciones por minuto ha de transportar una potencia de N CV. Calcular su diámetro, siendo k_t' el coeficiente de trabajo por torsión.

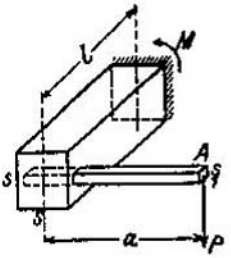
286. La superficie de una elipse de semiejes b y c debe dividirse por medio de otra elipse concéntrica y semejante (b_1, c_1) de modo que las áreas (las de la elipse interior y del anillo elíptico) sometidas a igual par de torsión den iguales cargas tangenciales máximas. Hallar la relación de los semiejes $\alpha = b_1/b = c_1/c$.

287. De un material que pesa G y cuyo peso específico es γ se ha de formar un tubo de longitud l que resista el par torsor M_t sin que la carga exceda de k_t'. Calcular los radios exterior e interior R y r.

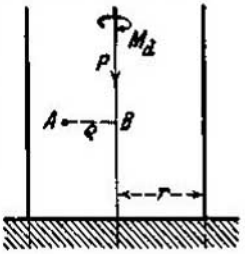
288. De un tronco de madera de $d = 30$ cm. de diámetro debe sacarse una pieza de sección rectangular de modo que ofrezca la máxima resistencia a la torsión. Esta pieza usada como árbol de transmisión da 10 revoluciones por minuto y su carga máxima no ha de exceder de $k_t' = 9$ at. Calcular los CV. que puede transportar.

289. Un árbol circular de radio r está sometido a torsión. Calcular el radio parcial r_1 de la parte interior del árbol que absorbe la n-ésima parte del par torsor.

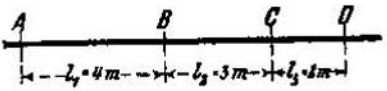
290. Una barra cuadrada, de longitud l y sección s^2, lleva unida a uno de sus extremos otra barra del mismo material, de longitud a y sección s_1^2. En el extremo A actúa la fuerza P, y el punto A experimenta cierto descenso. Hallar el ángulo φ que debe girar la otra sección extrema de la barra s^2 para que el punto A vuelva a su primitiva posición. Se tiene $s_1 = s/5$, y el coeficiente de Poisson es $m = 4$.



291. Sobre un gorrón de radio $r = 4$ cm. actúan una fuerza axial $P = 20$ t. y un par de torsión $M_t = 800$ mkg. Hallar para un punto A del interior a la distancia $\varrho = 2$ cm. del eje las tensiones principales en magnitud y posición.



292. Un árbol de transmisión de sección circular de radio a, que da n revoluciones por minuto, tiene que recibir y transmitir las siguientes potencias: absorber la $N_1 = 3$ CV. en A y $N_3 = 12$ CV. en C, que provienen de dos motores, y transmitir $N_2 = 8$ CV. en B y $N_4 = 7$ CV. en D a dos máquinas-herramientas. Calcular el ángulo total de giro de la barra y dibujar el diagrama de las potencias transportadas.



V. Esfuerzos normales y de flexión (flexión compuesta)

16. Fibra neutra y núcleo central

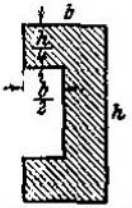
293. Hallar la relación que existe entre el área del núcleo central de un triángulo equilátero y su área total.

294. El perímetro del núcleo de un anillo circular coincide con el círculo interior. Determinar la relación de los diámetros del anillo.

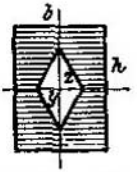
295. Hallar el núcleo de un hexágono regular.

296. Determinar el núcleo de la figura adjunta.

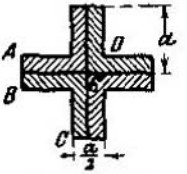
297. Un rectángulo b, h tiene un hueco o aligeramiento interior en forma de rombo. Determinar las diagonales $2y$, $2z$ de éste, con la condición de que el perímetro del rombo coincida con el núcleo de la superficie rayada.



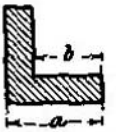
Problema 296



Problema 297



Problema 298

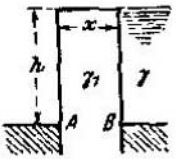


Problema 299

298. Sobre la viga de sección cruciforme representada en la figura actúa una fuerza normal. Determinar el lugar de sus puntos de aplicación de modo que no cambie la naturaleza de las cargas de la sección.

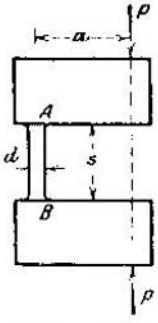
299. Determinar el núcleo de una sección angular de lados iguales.

17. Tracción o compresión y flexión (flexión compuesta)



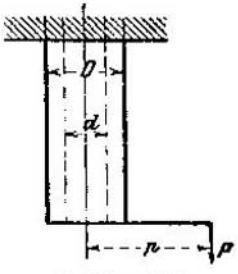
300. Un muro de altura h y peso específico γ_1 experimenta la presión de una altura igual de agua (peso específico γ). Determinar la anchura mínima x del muro necesaria para que la tracción en B no rebase el coeficiente de trabajo admisible por tracción k_t'.

301. En los extremos de un perno corto AB de diámetro d están fijadas dos piezas o mandíbulas sobre las que actúan fuerzas P. Hallar las máximas cargas de trabajo en el perno, así como la flecha en su punto medio.
(R. Stribeck, ZVDI, tomo 51, pág. 1445; 1907.)



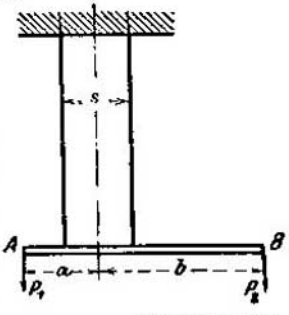
Problema 301

302. Una pieza, de sección de anillo circular (diámetro exterior D, relación de diámetros $d/D = \delta$), experimenta la acción de la fuerza P. Determinar el valor máximo del brazo p de la fuerza de modo que la carga de trabajo en la barra no exceda del coeficiente de trabajo del material por tracción k_z'.

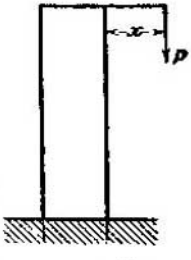


Problema 302

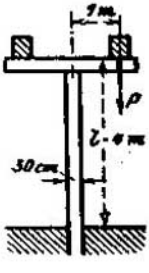
303. Una barra de sección cuadrada s^2 lleva en su extremo un travesaño cuyos extremos distan a y b del centro del cuadrado. ¿Cómo debe distribuirse la fuerza total P que actúa en los puntos A y B para no rebasar la carga admisible por tracción k_z'? Hallar el valor máximo de P y la relación que hay en este caso entre P_1 y P_2.



304. Un poste de madera de encina, de sección cuadrada de 20 cm. de escuadría y 4 m. de longitud, está solicitado por la fuerza excéntrica $P = 800$ kg. El extremo inferior del poste se supone perfectamente empotrado. Determinar la excentricidad x, respecto del borde, de la fuerza P para tener un coeficiente de seguridad igual a 5. (Carga de rotura por compresión, $K_d = 345$ atmósferas; módulo de elasticidad, $E = 103\,000$ at.)



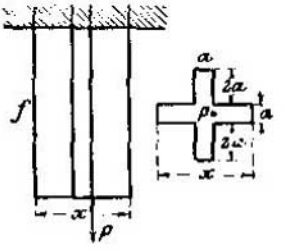
305. Un pie derecho de madera de abeto, de escuadría $s = 30$ cm. y longitud $l = 4$ m., sostiene un travesaño, sobre el que se apoyan dos vigas. Sobre una de éstas actúa una fuerza P. Hallar la resistencia P de la columna, con un coeficiente de seguridad igual a 4, la flecha en el extremo superior y las tensiones máximas. (Carga



de rotura por compresión, $K_d = 280$ at.; módulo de elasticidad, $E = 108\,000$ at.)

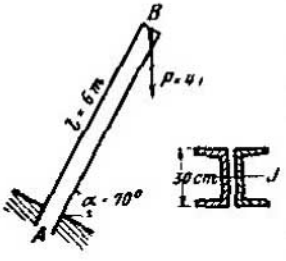
306. Una columna aislada de acero dulce de la sección indicada en la figura (cuatro hierros en ángulo, dimensiones en centímetros) y 4 m. de longitud está sometida a la acción de compresión de una fuerza excéntrica que actúa en el punto P. Calcular la resistencia (o sea la fuerza que puede resistir), siendo 4 el coeficiente de seguridad. (Carga límite de elasticidad = 2200 atmósferas; módulo de elasticidad, $E = 2 \cdot 10^6$ at.)

Problema 306

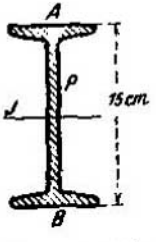


Problema 307

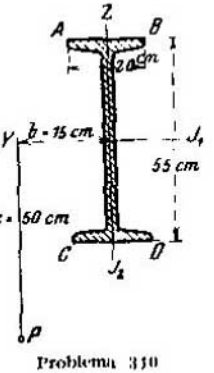
307. En una pieza de sección en cruz actúa la fuerza excéntrica P, tal como indica la figura. La magnitud x es desconocida. Determinar la relación $x/a = z$, bajo la condición de que el coeficiente de trabajo en la fibra más alejada f sea nulo.



308. La pluma o brazo de una grúa tiene $l = 6$ m. de longitud, y una sección formada por dos hierros en U con un m. de i. $J = 16\,052$ cm.^{4} y un área $F = 117{,}6$ cm.^{2} Su inclinación respecto a la horizontal, $\alpha = 70°$; está empotrada en A y cargada en B con $P = 4$ t. Determinar las cargas máximas de trabajo en posición y magnitud. ($E = 2 \cdot 10^6$ at.)



309. Un perfil normal I, n.° 15, de luz $l = 4{,}5$ m. está sometido en dirección axial a una fuerza de compresión $P = 10$ t., que actúa en el plano de simetría. Determinar la máxima excentricidad p que puede tener la carga sin que el trabajo del material rebase 1000 at. ($E = 2 \cdot 10^6$ at.; m. de i., $J = 735$ cm.^{4}; área de la sección, $F = 20{,}4$ cm.^{2})

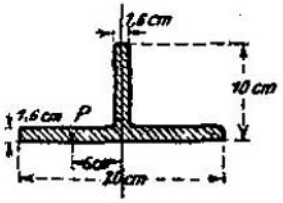


Problema 310

310. Sobre un perfil normal I, n.° 55, cuyas dimensiones indica la figura, actúa una fuerza de tracción P en la dirección del eje. Las cargas de tracción o compresión máximas

no han de pasar de 1000 at. Hallar el valor máximo de P. (área de la sección, $F = 213$ cm.^{2}; m. de i., $J_1 = 99\,134$ cm.^{4}; $J_2 = 3488$ cm.^{4})

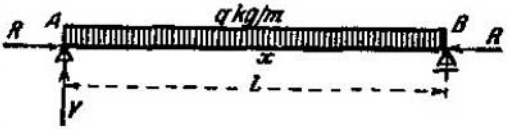
311. Hallar la carga total que puede resistir un hierro ⊤ de 10 m. de longitud y sección como la figura, actuando la fuerza solicitante P en el centro de una de las alas y comprimiendo el perfil en dirección axial. La seguridad debe ser 4. (Carga límite de elasticidad = 2200 at.; módulo de elasticidad, $E = 2 \cdot 10^6$ at.) Hallar la magnitud y posición de las máximas cargas de trabajo.



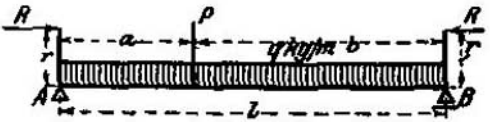
312. Una barra prismática sometida a la acción de una fuerza de tracción excéntrica P (brazo de excentricidad p) no debe experimentar cargas de trabajo superiores a k_z' por tracción y k_d' por compresión. Delimitar la zona de los valores de P y p que cumplen esa condición en el diagrama P, p.

(R. Bredt, ZVDI, tomo 42, pág. 694, 1898.)

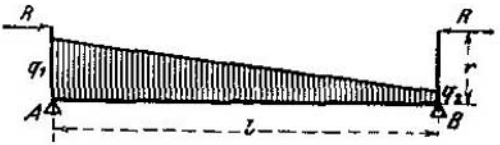
313. Una viga simplemente apoyada está sometida a la acción de una carga uniformemente repartida y a la de dos fuerzas axiales de compresión R en sus extremos. Hallar la ecuación de la elástica respecto al sistema de ejes x, A, y y la flecha correspondiente al punto medio de la viga.



314. Una viga simplemente apoyada está sometida a la acción de una carga uniformemente repartida, a la de una fuerza aislada P y a la de dos fuerzas excéntricas de compresión R que actúan en sus extremos. Calcular la flecha en el punto de aplicación de P.



315. Hallar la ecuación de la línea elástica de una viga simplemente apoyada sometida a las cargas que se indican en la figura.

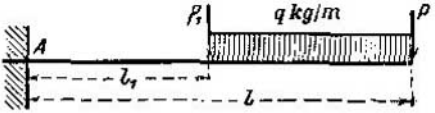


VI. Flexión y esfuerzo cortante (flexión sencilla)

18. Diagramas de esfuerzos cortantes

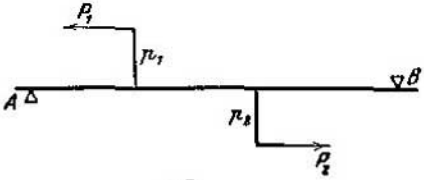
Dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes en los siguientes casos:

316.

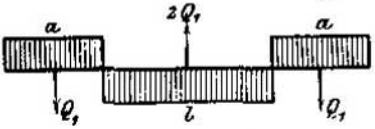


317.

318.

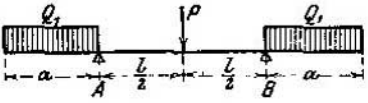


319. Viga con dos brazos rígidos en los que actúan fuerzas axiales. Dibujar también la línea de momentos.

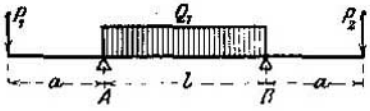


320. Viga sin apoyos, solicitada por fuerzas uniformemente repartidas Q_1, $2Q_1$, Q_1 que se equilibran entre sí.

321.

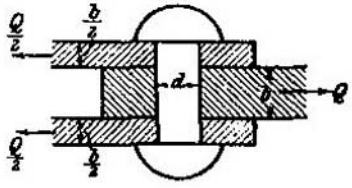


322.

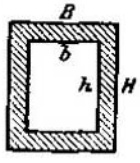


323.

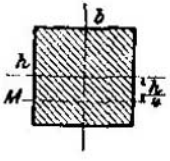
19. Flexión y esfuerzo cortante



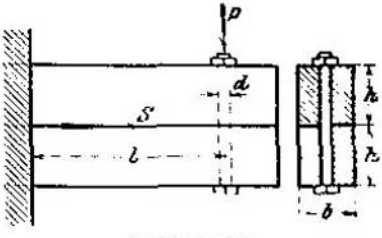
324. El coeficiente de trabajo admisible por tracción de un roblón es k'_z, el admisible por flexión tiene el mismo valor y el correspondiente al esfuerzo cortante es $k'_s = 0{,}8\ k'_z$. El roblón en sus dos secciones solicitadas ha de resistir a la flexión y al esfuerzo cortante con la misma seguridad. Calcular el diámetro d del roblón conociendo el espesor b de la plancha.



325. Una viga simplemente apoyada de luz l se carga en el punto C a la distancia $a = l/4$, $b = 3\ l/4$ de los apoyos con la fuerza P. La sección de la viga es tubular, siendo $b : B = h : H = n : 1$. El coeficiente de Poisson es 3. ¿A partir de qué relación $l : H$ deberá hacerse el cálculo para el esfuerzo cortante en lugar de hacerlo para la flexión?

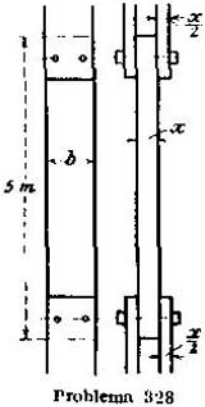


326. Una viga empotrada en sus extremos está cargada en el punto medio con la fuerza P. Su sección transversal es un rectángulo de lados b y h. La longitud de la viga es $l = 4\ h$. Hallar para el punto M del perímetro situado a la distancia $h/4$ de la fibra neutra y en el punto medio de la longitud de la viga las cargas principales σ_1, σ_2, σ_3 en posición y magnitud.



Problema 327

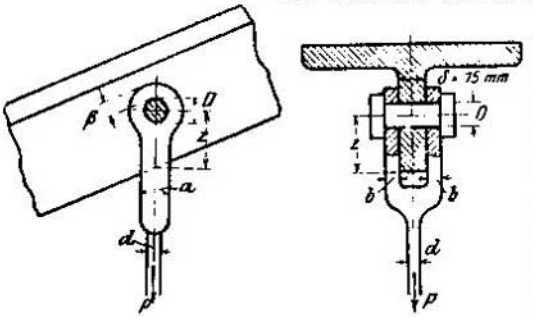
327. Dos vigas iguales están empotradas por uno de sus extremos; por el otro están unidas por medio de un perno sobre el que actúa la fuerza P. Determinar la carga tangencial τ y el esfuerzo tangencial S que se desarrolla entre ambas vigas. Calcular el diámetro del perno adoptando un coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante de k'_s.



Problema 328

328. Un tirante vertical se compone de 10 elementos de 5 m. de longitud y $b = 8$ cm. de ancho en la forma indicada en la figura.

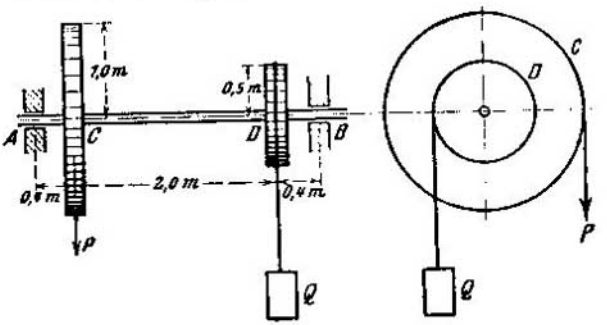
Los extremos de los eslabones están enlazados entre sí por medio de dos tornillos. Del extremo inferior del tirante cuelga un peso $P = 3$ t.; el peso específico del hierro es 7,6, y la carga admisible por tracción es $k'_z = 600$ at. Los tornillos son de hierro dulce y admiten una carga de trabajo por flexión $k'_b = 1180$ at. Calcular el espesor x de los eslabones y el diámetro y de los tornillos sometidos a flexión.



329. A uno de los pares de una armadura de hierro se une un montante de hierro sometido a tracción. El esfuerzo $P = 5000$ kg. es conocido y las cargas de trabajo admisibles son: por tracción y flexión, $k'_z = k'_b = 700$ at.; por esfuerzo cortante, $k'_s = 540$ at. Calcular: *a*) el diámetro d del montante; *b*) el espesor b, siendo $a = 1{,}25\ d$; *c*) el diámetro D de los pernos de unión; *d*) la anchura β del anillo; *e*) la distancia z.

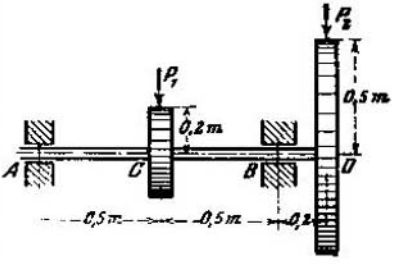
20. Flexión y torsión

330. Un eje de transmisión cilíndrico lleva dos poleas C y D de diámetros 1 m. y 0,5 m. a las distancias indicadas en



la figura. En la llanta de la C actúa la fuerza $P = 300$ kg.; en la de la D, la fuerza Q, que está en equilibrio con P. Calcular el diámetro d del eje, admitiendo los siguientes coeficientes de trabajo: por flexión, $k'_b = 600$ at.; por torsión, $k'_t = 240$ at.

331. Un eje de transmisión cilíndrico de hierro dulce apoyado en A y B lleva dos poleas C y D de radios 0,2 m. y 0,5 m. Las cargas totales que las poleas transmiten al eje son $P_1 = 350$ kg. y $P_2 = 200$ kg. La potencia que una de las poleas transmite a la otra es $N = 8$ CV., el número de revoluciones por minuto es $n = 80$, y los coeficientes de trabajo admisibles son $k'_b = 410$ at. para la flexión y $k'_t = 200$ at. para la torsión. Calcular el diámetro d del eje.

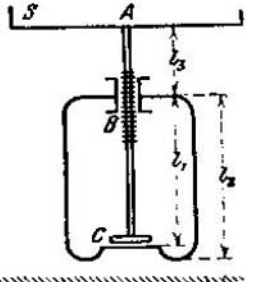


332. Una viga de sección rectangular (b, h) está colocada de plano, es decir, de modo que su mayor dimensión h quede horizontal. El máximo momento flector M_b y el máximo momento de torsión M_t corresponden a la misma sección y se suponen conocidos. Del mismo modo son datos del problema los coeficientes de trabajo, por flexión k'_b y por torsión k'_t, así como la relación $b : h = n$. Calcular el valor de b. (El coeficiente de Poisson es $m = 10/3$.)

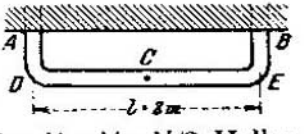
333. Una viga de hierro de sección rectangular (b, h) está colocada de canto, esto es, de modo que su mayor dimensión h sea vertical. Se dan el momento flector M_b y el de torsión M_t de una sección. Hallar el lugar de los máximos alargamientos de la sección.

334. En la sección de una viga colocada de canto, rectangular $(b : h = 1 : 2)$, el momento flector M_b es igual al de torsión M_t, y la relación de alargamientos es $\alpha_0 = 1$. Hallar el máximo alargamiento ε_{max} de la sección en posición y magnitud.

335. El husillo de acero al crisol de una prensa de volante tiene un diámetro de núcleo $d = 10$ cm., un ángulo de inclinación de rosca $\alpha = 14°$ y un ángulo de rozamiento $\varrho = 6°$. Al girar el husillo produce una compresión axial P. Calcular P de modo que en ningún punto se rebase la tensión o carga unitaria de 3000 at.



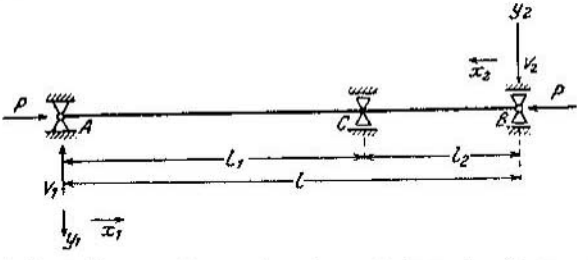
336. Un hierro redondo en forma de estribo está empotrado en A y B y sometido en su punto medio C a una fuerza $P = 400$ kg. normal a su plano. Calcular el radio r del hierro, siendo las cargas de trabajo admisibles: por flexión, $k'_b = 1320$ at., y por torsión, $k'_t = k'_b/2$. Hallar las tensiones en los trozos $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ y las fuerzas que las originan.



VII. Flexión por compresión (pandeo)

21. Pandeo elástico (teoría de Euler)

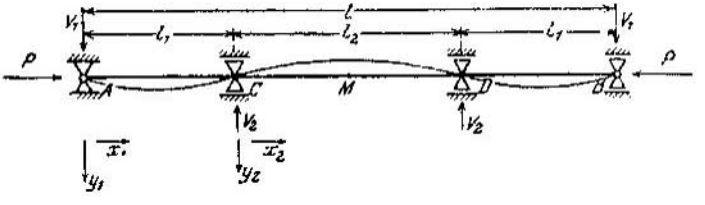
337. La barra $\overline{AB} = l$ articulada en sus extremos A y B y en un punto intermedio C está sometida a la acción de una



fuerza axial P. Determinar el valor mínimo de P que produce el pandeo de la barra.

338. ¿Qué resultado se obtiene en el problema anterior, suponiendo $l_1 = 2\ l_2$?

339. La barra $\overline{AB} = l$ está articulada en sus dos extremos



A y B y en dos puntos simétricos intermedios C y D. Hallar la fuerza axial P que provoca el pandeo de la barra.

340. ¿Qué resultado se obtiene en el problema anterior, suponiendo $l_1 = l_2 = l/3$?

341. ¿Qué resultado se obtendrá en el problema **339** suponiendo que $l_1 = l/4$, $l_2 = l/2$?

342. Una barra prismática, de dos secciones escalonadas, articulada en A y B está sometida a un esfuerzo de compresión.

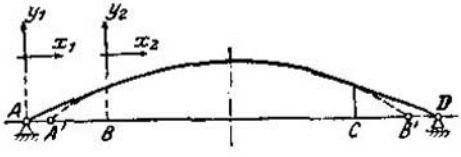
Los m. de i. para los dos trozos son J_1 y J_2. Hallar la carga total de pandeo.

(F. Jasinski, Annales des ponts et chaussées, Ser. 7, t. 8, página 233, 1894.)

343. ¿Cuál será el resultado del problema anterior, suponiendo que el trozo $\overline{BC}$ es rígido, es decir, que su m. de i. es muy grande respecto al del otro trozo? (Este caso tiene aplicación en piezas sometidas a compresión y que tan sólo parcialmente poseen rigidez.)

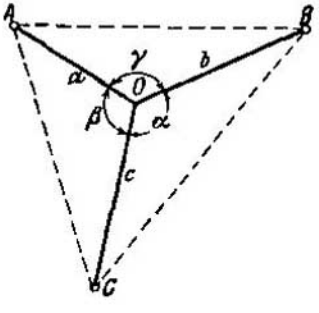
(H. Streuli, Schweiz. Bauzeitung, tomo 26, pág. 165, 1895.)

344. Demostrar que la carga total de pandeo de una barra $ABCD$, simplemente apoyada en sus extremos y que en ellos tiene dos trozos $\overline{AB} = \overline{CD}$ perfectamente rígidos, es idéntica a la de una barra cuya longitud $\overline{A'B'}$ es igual a la que recorta sobre el eje la prolongación de la sinusoide de BC y que tiene igual m. de i. que la barra dada. (De este modo se tiene en cuenta, en las experiencias de pandeo, la influencia del empotramiento.)



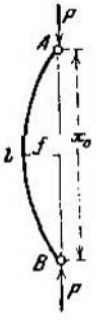
(Th. v. Kármán, Mitt. über Forschungsarbeiten, cuad. 81, 1910.)

345. Estudiar la resistencia al pandeo del siguiente sistema plano compuesto de tres barras. Las tres barras $\overline{AO} = a$, $\overline{BO} = b$, $\overline{CO} = c$ están entre sí rígidamente unidas en el punto O. Las cargas totales son axiales y actúan en A, B y C; cada varilla es de por sí suficiente para no pandearse, y el sistema no experimenta flexión plana. Hallar la ecuación de condición entre los esfuerzos axiales A, B, C y las longitudes a, b, c de las barras para que el punto O salga del plano, es decir, para que el sistema experimente una flexión lateral.



(L. Vianello, ZVDI, tomo 50, pág. 1753, 1906.)

346. Una columna vertical, de longitud l y sección constante, está sometida a la acción única de su peso propio, que vale q por unidad de longitud. Determinar el valor de q que provoca el pandeo de la misma.



Prob.ª 347

347. Una varilla delgada de longitud l experimenta la acción de una fuerza P de compresión axial, que es mayor que la carga total P_k de pandeo. Calcular la flecha f en el punto medio.

348. Calcular las tensiones máximas σ de la varilla del problema anterior y dibujar el diagrama de las P y σ.

349. ¿Qué modificación experimenta la fórmula de Euler para la carga total de pandeo

$$P_k = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

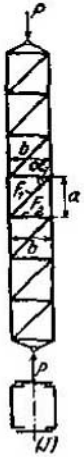
[véanse fórmulas (83) y (84)], si se tienen en cuenta no solamente las tensiones normales, sino también las tangenciales?

(H. Lorenz, ZVDI, tomo 52, pág. 827, 1908.)

350. Demostrar que la carga total de pandeo de una viga de celosía como la representada en la figura viene dada por la expresión

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha \, E F_1} + \frac{b}{a E F_2} \right)},$$

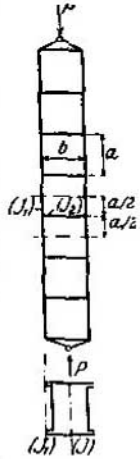
siendo la significación de las letras la indicada en la figura



Prob.ª 350

351. Demostrar que la carga total de pandeo de una viga compuesta de cabezas y montantes, tal como indica la figura, viene dada por la fórmula

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left[\frac{a b}{12 E J_2} + \frac{a^2}{24 E J_1} \right]}$$



Problema 351

(S. Timoshenko, Festigkeitslehre, 1929.)

352. Demostrar que el momento crítico de torsión M (con el que se inicia el pandeo) en un alambre recto de sección circular, de longitud l y rigidez EJ, vale

$$M = \frac{2\pi EJ}{l}.$$

(A. G. Greenhill, Proc. Inst. Mech. Eng. 1883, pág. 183.)

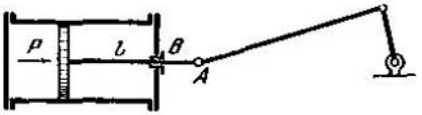
22. Pandeo plástico. Cálculos técnicos de pandeo

353. Una pieza de madera de sección cuadrada de 4 cm. de lado está articulada en sus extremos y sometida a compresión. ¿Para qué longitud cesa de ser aplicable la fórmula de Euler?

354. Determinar la carga de pandeo de un rollizo de madera de $l = 3$ m. de longitud y $d = 20$ cm. de diámetro, suponiendo que por uno de sus extremos está empotrado, y por el otro, articulado.

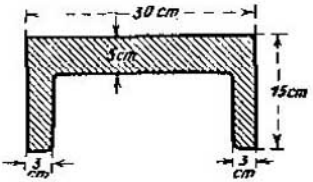
355. Una columna hueca de fundición, de radios 12 y 8 cm., se somete a una carga $P = 90$ t. Determinar la longitud l de pandeo suponiendo articulados sus extremos.

356. Una columna hueca de fundición de 4 m. de altura, empotrada en la base y articulada en su otro extremo, debe soportar una carga total de 50 t. con un coeficiente de seguridad igual a 5. Se da $E = 10^6$ at. Calcular las dimensiones de la columna.



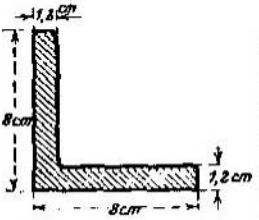
357. Calcular el diámetro d del vástago de un émbolo sabiendo que su longitud es l, que sobre él actúa la fuerza P y que el coeficiente de seguridad ha de ser igual a 20. Material: acero dulce.

358. Una riostra de madera de 4 m. de longitud y sección cuadrada, articulada en sus extremos, está comprimida axialmente con 5000 kg. Calcular su escuadría con una seguridad contra el pandeo igual a 11.

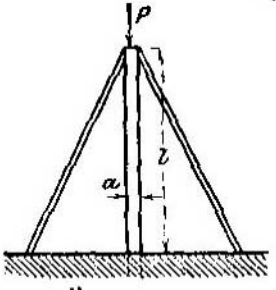


359. Un hierro en U, cuya sección indica la figura, está sometido a la acción de una carga central en dirección de su eje. La carga admisible por compresión es $k'_d = 1000$ at. y debe soportar una carga $P = 120$ t. con la debida seguridad, suponiendo que un extremo está empotrado, y el otro, libre. Determinar la longitud de la pieza.

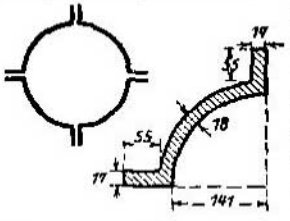
360. Una columna de fundición de $l = 5$ m. de longitud y sección anular (diámetro exterior, $D = 30$ cm.; diámetro interior, $d = 25$ cm.) tiene articuladas sus secciones extremas. Calcular la carga unitaria admisible por pandeo, sabiendo que el coeficiente de trabajo por compresión vale $k'_d = 800$ at.



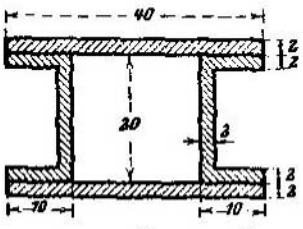
361. Un hierro en ángulo, de lados iguales, de fundición y de las dimensiones acotadas en la figura, tiene 3 m. de longitud, está empotrado en sus dos secciones extremas y sometido a una compresión central. Determinar la carga unitaria de pandeo, sabiendo que la de compresión vale $k'_d = 700$ at.



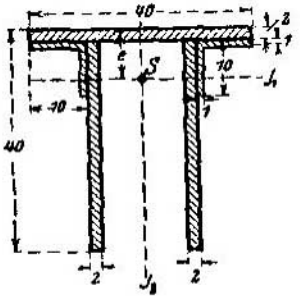
362. Un poste de sección cuadrada ($a = 24$ cm.) y de longitud $l = 6$ m. está empotrado en el suelo y apoyado en sus cuatro costados por riostras. Hallar la carga total P que puede soportar, suponiendo que toda ella la absorbe el poste con un coeficiente de seguridad igual a 4.



363. Calcular la carga total P que puede soportar una columna de $l = 4{,}5$ m. de longitud compuesta de cuatro cuadrantes (de acero dulce) en la forma indicada en la figura. Uno de los extremos está empotrado; el otro, libre. (Coeficiente de seguridad, $\mathfrak{S} = 5$; acotaciones en milímetros.)

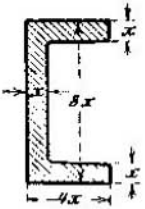


364. Hallar la carga total P que puede soportar un apoyo aislado de 8 m. de longitud, de sección tubular y de acero dulce, sabiendo que la carga unitaria admisible por compresión es $k'_d = 600$ at. y que de ella ha de deducirse el coeficiente de seguridad contra el pandeo (medidas en centímetros).



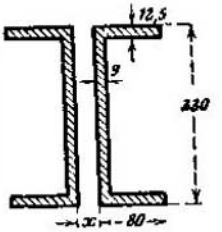
365. Una columna de acero dulce y sección como indica la figura (medidas en centímetros) debe resistir una carga total de 163 t. con un coeficiente de seguridad $\mathfrak{S} = 4$, contra el pandeo. Las secciones extremas están articuladas. Calcular la longitud de la columna.

366. Una columna de 2 m. de longitud y sección indicada en la



Problema 366

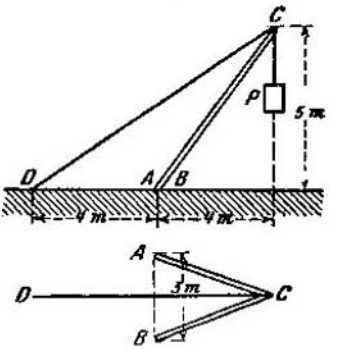
figura debe soportar una carga total de 17 t. con el debido coeficiente de seguridad. La carga unitaria admisible por compresión es 800 at. El material es acero dulce. Hallar el valor de x. Se supone que los extremos están articulados.



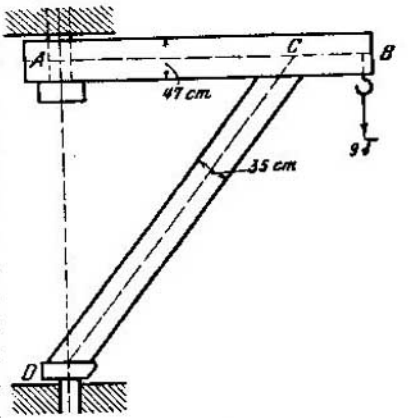
Problema 367

367. Una columna de 6,6 m. de longitud, articulada en sus extremos, está compuesta de dos hierros iguales en U (acero dulce) cuyas dimensiones en milímetros se acotan en la figura. La carga total que debe soportar es $P = 13$ t. Calcular la separación x de los perfiles para tener un coeficiente de seguridad contra el pandeo igual a 4.

368. Una cabria se compone de dos piezas de madera $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ y de un tirante de hierro $\overline{DC}$. Las piezas de madera tienen sección cuadrada y el tirante es de sección circular. Del punto C cuelga un peso $P = 2$ t. Calcular el diámetro d del tirante (coeficiente de trabajo por tracción, $k'_t = 600$ at.) y la escuadría de las piezas de madera con un coeficiente de seguridad igual a 11.

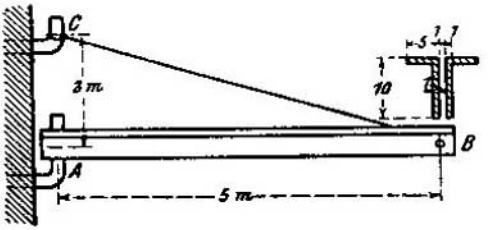


369. Una grúa de madera, cuya disposición se indica en la figura, tiene las siguientes dimensiones: $\overline{AC} = 3$ m., $\overline{CB} = 1$ m., $\overline{AD} = 4$ m. El peso que actúa en B vale $P = 9$ t. La sección de la viga $\overline{AB}$ es rectangular de lados 35 y 47 cm.; la de la tornapunta $\overline{DC}$, un cuadrado de 35 cm. de lado. La grúa está sustentada en A y D por medio de pernos alrededor de los cuales puede girar. Calcular: *a*) la tensión máxima en la viga $\overline{AB}$; *b*) hallar la compresión total de la tornapunta $\overline{DC}$ y determinar

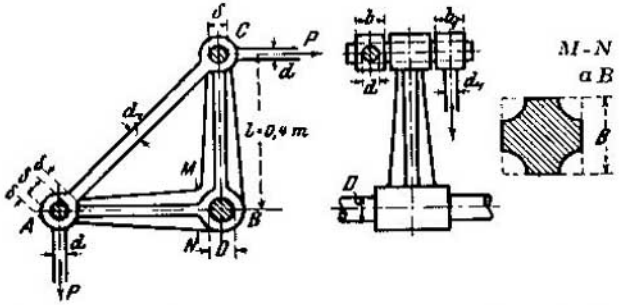


la carga total máxima que podrá resistir, siendo la carga de trabajo por compresión $k'_s = 80$ at.; *c*) determinar el diámetro de los pernos (hierro fundido) A y D, siendo su coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante $k'_s = 480$ at.

370. La ménsula giratoria horizontal $\overline{AB}$ es de acero dulce, tiene 5 m. de longitud, y su sección se compone de dos hierros en ángulo de dimensiones (en centímetros) acotadas en la figura, y está sustentada en A por medio de un perno alrededor del cual puede girar y sostenida por un tirante $\overline{CB}$ que tira del punto C. El peso propio de la ménsula es 100 kg./m. Calcular: *a*) la tracción y compresión máxima de la ménsula (coef. de elast., $E = 2 \cdot 10^6$ at.; *b*) la seguridad contra el pandeo, de la misma.

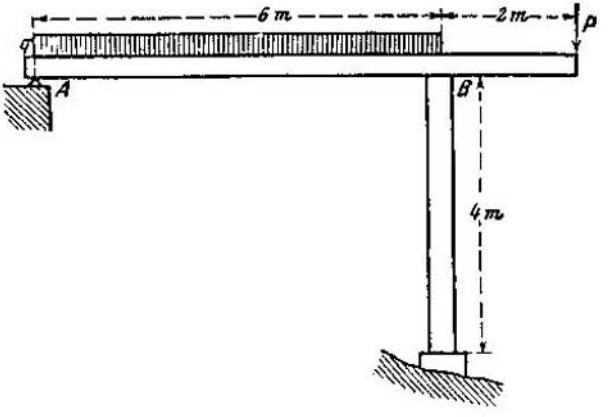


371. La palanca angular ABC del mecanismo de una bomba recibe la acción de una fuerza de tracción P que oscila entre 2 t. y 5 t. Se tiene $\overline{AB} \perp \overline{BC}$. Los tres tirantes, el árbol D y los pernos δ son de hierro dulce y la palanca es de fundición de sección cruciforme. Calcular: *a*) los coeficientes de trabajo admisibles para el hierro dulce, por tracción y por esfuerzo cortante; *b*) los diámetros d, d_1, δ y D; *c*) los anchos b y b_1; *d*) el m. de i. J_{min} de la sección transversal $\overline{MN}$ de la palanca en función de B y α ($\alpha = 0{,}4$); *e*) el espesor B necesario para tener un coeficiente de seguridad contra el pandeo igual a 10.



372. Una viga de 8 m. de longitud, de acero dulce, está sustentada y cargada tal como se indica en la figura. Su carga

uniformemente repartida vale $q = 1000$ kg./m. y la fuerza concentrada en el extremo $P = 3$ t. La sección de la viga es un perfil normal en I. En B se apoya sobre una columna hueca de

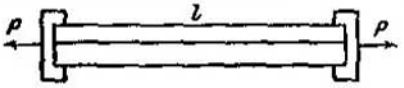


fundición de 4 m. de altura, de sección circular. Calcular: *a*) la magnitud y situación del máximo momento flector; *b*) el perfil normal I, siendo el coeficiente de trabajo por flexión $k'_b = 700$ at.; *c*) las dimensiones de la columna R y r siendo $r/R = \alpha = 7/8$ y la seguridad contra el pandeo igual a 5.

VIII. Materiales heterogéneos

23. Estructuras compuestas

373. Dos barras de igual longitud y de distinto material de secciones F_1 y F_2 y coeficientes de elasticidad E_1 y E_2, están íntimamente unidas entre sí y sometidas a la acción de una fuerza axial P. Calcular la tensión producida en cada barra y el alargamiento correspondiente.



374. Las barras del problema anterior, bajo la acción de la fuerza P, deben sufrir tensiones que estén entre sí en la relación α. Esto es posible solamente si antes de actuar la fuerza las barras tienen ciertas tensiones σ_{01} y σ_{02}. Calcular estas tensiones iniciales.

375. Una barra de hierro sometida a la acción de una fuerza axial P se recubre de hormigón. Una vez fraguado éste, se retira la fuerza P. ¿Qué tensiones se producirán entonces en el hierro y en el hormigón?

376. La sección de una barra de hormigón armado tiene $F_1 = 4$ cm.² de hierro y $F_2 = 120$ cm.² de hormigón; el hierro tiene 270 at. de tensión inicial. Hallar el valor de la fuerza axial P de compresión que rebajará a cero la tensión del hierro.

377. Al fraguar el cemento de un elemento de hormigón armado se producen compresiones en el hierro y tracciones en el hormigón. La contracción del hormigón al fraguar en el aire vale ε_s. Determinar la tracción del hormigón y la compresión de la armadura en función de ε_s y de la cuantía $\varphi = F_e/F_b$ de la sección. Los módulos de elasticidad son: para el hierro, E_e; para el hormigón, E_{bz}, y su relación,

$$\gamma = E_e/E_{bz}$$

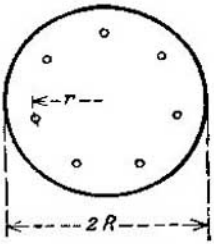
Aplicar el problema utilizando los siguientes valores numéricos:

$$\varepsilon_s = 0{,}000062, \quad \begin{matrix} F_b = 400 \text{ cm.}^2, & F_e = 3{,}14 \text{ cm.}^2 \\ E_{bz} = 250\,000 \text{ at.}, & E_e = 2{,}100\,000 \text{ at.} \end{matrix}$$

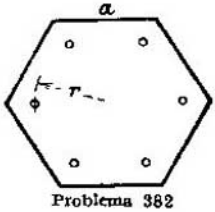
378. Calcular la fuerza de tracción P a que ha de someterse una armadura antes de hormigonar, para que después del fraguado y retirada de la fuerza P sean nulas las tensiones en el hierro y en el hormigón.

379. Con objeto de que después del fraguado no se produzcan tracciones en el hormigón, se somete durante el proceso la armadura a la acción de una fuerza de tracción P que se retira después del fraguado. Calcular la compresión del hormigón.

380. Una columna de hormigón armado tiene una armadura uniformemente repartida alrededor de su línea media. Al fraguar el hormigón, la longitud l de la columna se acorta en la magnitud δl. Determinar el valor del acortamiento si la columna estuviese sin armadura.

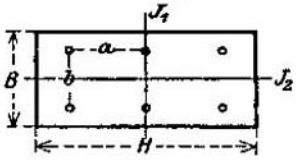


Problema 381

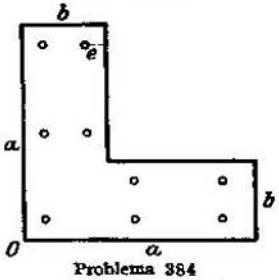


Problema 382

381-384. Las figuras representan secciones de pilares de hormigón armado sometidos a una fuerza central de compresión. El diámetro δ de las armaduras es muy pequeño comparado con la sección. Hallar los momentos de inercia principales del sólido virtual. La relación de los coeficientes de elasticidad del hierro y hormigón (a compresión) es ν.

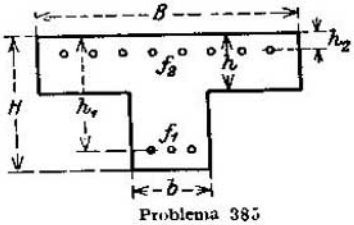


Problema 383

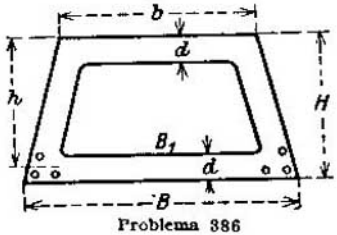


Problema 384

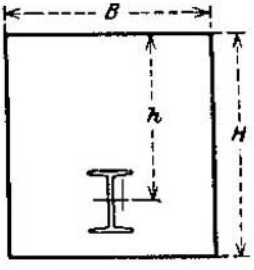
385-387. Las figuras representan secciones de vigas de hormigón armado sometidas a flexión. Determinar la posición de la fibra neutra y el momento de inercia para el borde superior (trasdós comprimido), suponiendo que los módulos de elasticidad son: para el hormigón trabajando por tracción, cero, y por compresión, E_{bd}; para el hierro, $E_e = \nu\, E_{bd}$.



Problema 385

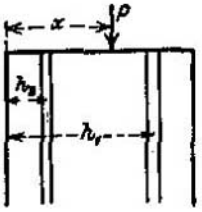


Problema 386

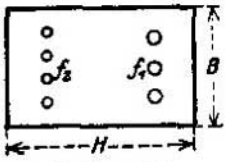


Problema 387

388. La sección de la viga del problema **385** se supone con armadura inferior solamente. Calcular su distancia al centro de compresión.

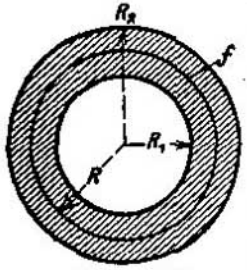


389. La sección de la viga del problema **387**, a consecuencia de la rigidez de la armadura puede absorber un momento flector mayor que con otra armadura de igual sección, pero que no fuese rígida. Calcular este aumento, siendo σ_c la máxima tensión del hierro y J_e el m. de i. del hierro respecto a su eje de gravedad horizontal.



Problema 390

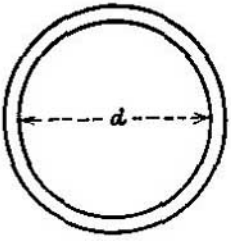
390. La figura representa, en planta y alzado, una columna con doble armadura sometida a la acción de la fuerza de compresión P. Hallar la máxima distancia x del borde, bajo la condición de que no se produzcan tracciones en ningún punto de la sección.



Problema 391

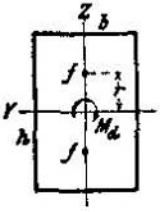
391. La figura representa la sección de una chimenea de hormigón que tiene una armadura cilíndrica f de radio R. La chimenea está sometida a la acción de una fuerza P de compresión en la dirección de su eje. Calcular la distancia p de la fuerza P al eje de modo que en la sección reinen solamente compresiones.

392. Calcular la compresión máxima del hormigón en el problema anterior.



393. Una columna de hormigón, que en dirección de su longitud l soporta compresiones σ_b, se zuncha con un anillo de hierro. Calcular las tracciones σ_e que se producen en este anillo y las compresiones σ'_b del hormigón en las direcciones diametrales del anillo.

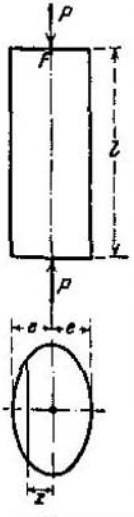
(R. Saliger, Der Eisenbeton, 5 ed., Viena, 1925.)



394. Una pieza de madera sometida a torsión se atraviesa longitudinalmente con dos hierros redondos de sección f. Hallar la distribución del momento torsor M_t entre la madera y los dos hierros.

24. Sólidos de elasticidad variable

395. Un alambre sometido a tracción, de radio r, tiene en el eje un módulo de elasticidad E_1 y este módulo crece linealmente hacia la periferia, donde alcanza el valor E_2. Determinar el esfuerzo de tracción P que puede soportar el alambre con la debida seguridad, es decir, de modo que en ningún punto se rebase la carga unitaria admisible por tracción k'_z.

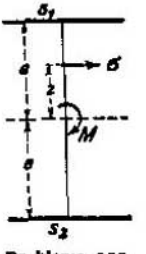


Problema 396

396. Una pieza recta de longitud l está sometida al esfuerzo central de compresión P. Determinar la línea elástica suponiendo que la tensión $\sigma_0 = P/F$ se distribuye uniformemente en la sección, pero que el módulo de elasticidad del material es variable con arreglo a la ley

$$E = E_0\ (1 + az/e),$$

siendo a una constante y z la distancia al eje de la pieza.



Problema 397

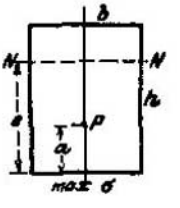
397. El momento flector M actúa en la sección (simétrica) de una viga recta. El material no es homogéneo, sino que el módulo de elasticidad E es variable según la ley

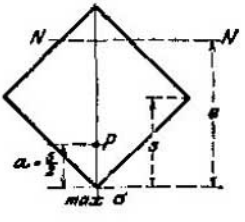
$$E = E_0\ (1 + az/e),$$

siendo a una constante y z la distancia al eje del elemento de superficie que tiene un módulo de elasticidad E. Determinar: 1.°, la tensión σ_0 en el c. d. g.; 2.°, la posición de los puntos de tensión nula de la sección; 3.°, las tensiones σ_1 y σ_2 en las fibras extremas s_1 y s_2.

(F. Stark, Tech. Blätter, 1907.)

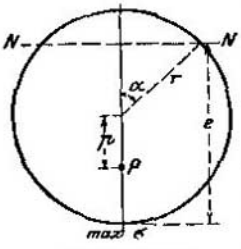
398. Una sección rectangular, cuyo material resiste solamente la compresión, está sometida a la acción de una compresión excéntrica P situada en el plano de simetría, a la distancia a del borde inferior. Determinar la posición de la fibra neutra NN y la carga unitaria máxima $\sigma_{máx}$.





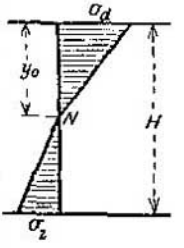
399. Una sección cuadrada, cuyo material resiste solamente la compresión, está sometida a la acción de una compresión P situada en el plano diagonal, a la distancia $s/2$ de la arista inferior. Determinar la posición de la fibra neutra NN y la tensión máxima $\sigma_{máx}$.

400. Una sección circular, que sólo resiste la compresión, recibe la acción de la fuerza excéntrica P. Hallar la relación entre el ángulo α y la excentricidad p, siendo $\overline{NN}$ la fibra neutra.



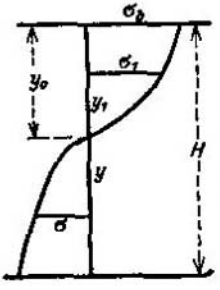
Problema 400

401. Una viga de hormigón de sección rectangular (sin hierro) tiene un módulo de elasticidad constante E_{bd} por compresión y otro módulo de elasticidad también constante E_{bz} por tracción. La relación de ambos números es conocida. Hallar la distancia y_0 de la fibra neutra al borde comprimido.

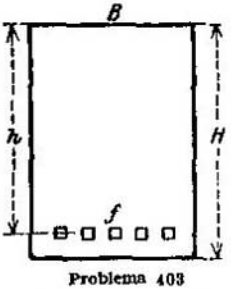


Problema 401

402. La viga de hormigón del ejemplo anterior no tiene módulos de elasticidad constantes, sino que obedece a la ley de Bach $\sigma^m = E_{bz}\,\varepsilon$ para la región sometida a tracción y $\sigma^{m1} = E_{bd}\,\varepsilon_1$ para la sometida a compresión. Demostrar que, en este caso, la distancia y_0 de la fibra neutra al borde comprimido no es constante como antes, sino que depende del valor de la compresión máxima σ_b.



403. Un momento flector M actúa sobre la sección de una viga de hormigón armado (véase fig.). El hormigón obedece a las leyes indicadas en el problema **401.** Determinar la compresión máxima del hormigón.



Problema 403

404. Una viga de hormigón armado de sección idéntica a la del problema **385** está sometida a la acción de un momento flector M. El hormigón obedece a las leyes del problema **401.** Hallar las cargas unitarias máximas del hormigón y del hierro.

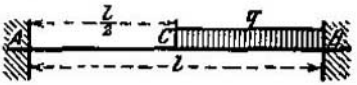
405. Una viga de sección rectangular está sometida a la acción de un momento flector M y una fuerza axial de tracción P. El material de la viga obedece a la ley de Hooke [fórm. (13 *a*)], pero los módulos de elasticidad E_1 y E_2 por tracción y compresión son distintos. Determinar la posición de la fibra neutra y las tensiones o cargas unitarias máximas $\sigma_{1\,\text{máx}}$ y $\sigma_{2\,\text{máx}}$.

(R. Bredt, ZVDI, tomo 42, pág. 694, 1908.)

IX. Estructuras hiperestáticas (estáticamente indeterminadas)

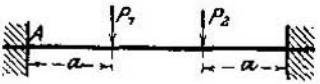
25. Vigas hiperestáticas

406. La figura representa una viga empotrada en sus apoyos y sometida a la acción de una carga uniformemente repartida a razón de q por unidad de longitud. Determinar las reacciones de los apoyos, los momentos de empotramiento, los puntos de inflexión de la línea elástica y el máximo momento flector. Dibujar el diagrama de momentos.

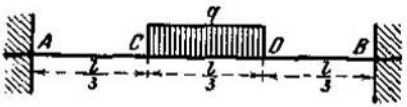


407. Una viga empotrada en sus extremos A y B está sometida a la acción de una fuerza aislada P de abscisas a y b respecto a A y B y, además, a la de una carga uniformemente repartida en toda su longitud a razón de q por unidad de longitud. Hallar el punto de la viga que tiene la flecha máxima.

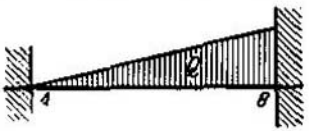
408. Una viga empotrada en sus extremos está sometida a la acción de dos fuerzas aisladas desiguales P_1 y P_2 colocadas simétricamente. Determinar P_2, bajo la condición de que en el punto de aplicación de P_1 sea nulo el momento flector.



409. Una viga empotrada en sus apoyos está cargada uniformemente a razón de q kg./m. en su tercio central. Calcular el máximo momento flector y dibujar el diagrama de momentos. ¿En qué secciones son nulas las tensiones normales?

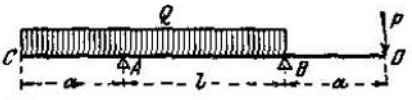


410. Una viga empotrada en sus extremidades está sometida a la acción de una carga total Q repartida de modo que su ley de distribución es una recta que pasa por A. Hallar las reacciones de los apoyos, los momentos M_A y M_B de empotramiento, los puntos de inflexión de la elástica y el momento flector

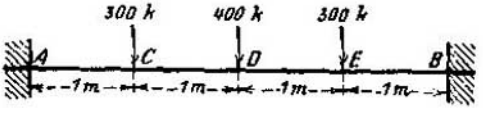


máximo entre apoyos. ¿Qué momento flector habrá de tomarse para el cálculo?

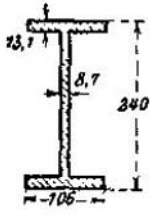
411. Una viga simplemente apoyada, de luz l, entre apoyos y con tramos volados a está sometida a la acción de la fuerza Q uniformemente repartida a lo largo de $CB = a + l$ y a la de una fuerza concentrada P que actúa en el extremo D. Calcular la longitud que debe tener a para que la viga pueda considerarse como empotrada en B. Hallar la posición y magnitud del máximo momento flector. Determinar las reacciones de los apoyos. Aplicación al caso $l = 2{,}5$ m., $Q = 2250$ kg., $P = 1800$ kg.



412. Una viga de madera de 4 m. de longitud, cargada con los tres pesos que se indican en la figura, está empotrada en sus extremos. La relación de lados de la sección es $b : h = 1 : 2$. Determinar b y h, sabiendo que el coeficiente de trabajo de la madera por flexión es $k'_b = 50$ at. (Se prescindirá del peso propio.)



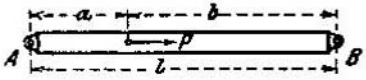
413. En una viga empotrada, de luz $l = 2{,}5$ m. y sección en doble T (medidas en milímetros), actúa a la distancia $a = 0{,}8$ metros de uno de los extremos una fuerza aislada P. Determinar esta fuerza de manera que la carga de trabajo sea $k'_b = 1000$ at., teniendo en cuenta el peso propio (peso específico, 7,8). Hallar la flecha en el punto de aplicación de P, teniendo en cuenta el peso propio. ($E = 2 \cdot 10^6$ at.)



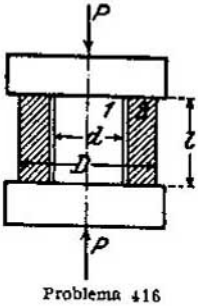
414. Una barra de $l = 10$ m. de longitud empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro soporta en su punto medio la fuerza aislada $P = 8$ t. Dibujar el diagrama de momentos de flexión y calcular el diámetro de la barra, siendo el coeficiente de trabajo por flexión $k'_b = 700$ at. Hallar las reacciones de los apoyos y la inclinación ψ_B de la barra deformada en el apoyo simple. ¿En qué sección de la barra son nulas las cargas normales? (se prescindirá del peso propio). ($E = 2 \cdot 10^6$ at.)

26. Método de las deformaciones (método geométrico)

415. Una pieza prismática $\overline{AB} = l$, cuyos extremos A y B están sustentados en articulaciones fijas, está sometida a la acción de una fuerza axial P que actúa en un punto cualquiera C del eje. ¿Cómo se distribuye esta fuerza entre los dos puntos de sustentación? ¿Cuál es el recorrido del punto C?



416. Determinar el acortamiento y las compresiones que se desarrollan en un cilindro macizo 1 de acero envuelto por otro 2 de cobre al ser ambos comprimidos entre las dos placas que se ven en la figura. Son datos: $P = 40$ t., $d = 10$ cm., $D = 20$ cm., $E_1 = 2{,}2 \cdot 10^6$ at. (acero), $E_2 = 1{,}1 \cdot 10^6$ at. (cobre).



Problema 416

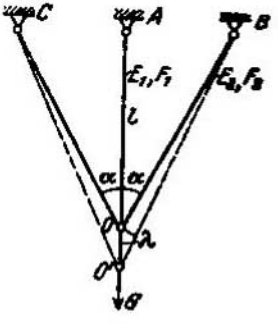
417. Determinar las tensiones que se producen en un perno de acero 1, embutido en el manguito de cobre 2 al dar a la tuerca un cuarto de vuelta. La longitud del perno es $l = 20$ cm.: el paso del tornillo en el extremo superior del perno, $h = 0{,}3$ cm.; la sección del perno, $F_1 = 6$ cm.^{2}, y la del manguito, $F_2 = 12$ cm.^{2} Los módulos de elasticidad son $E_1 = 2{,}2 \cdot 10^6$ atmósferas (acero) y $E_2 = 1{,}1 \cdot 10^6$ at. (cobre.)

Prob.ª 417

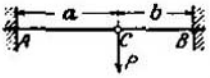
418. ¿Qué modificación experimentan las tensiones del problema anterior si el perno está, además, sometido a una tracción suplementaria de $P = 2000$ kg.?

(S. Timoshenko, Festigkeitslehre.)

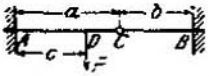
419. El peso G cuelga de tres varillas, de las cuales la de en medio tiene una longitud $\overline{OA} = l$, y las laterales, $\overline{OB} = \overline{OC} = l/\cos\alpha$. Los módulos de elasticidad y las secciones respectivas son E_1 y F_1 para la central y E_2 F_2 para las laterales. Determinar las tracciones totales S_1 y S_2 de las varillas y el descenso λ del peso.



420. Dos vigas de longitudes a y b

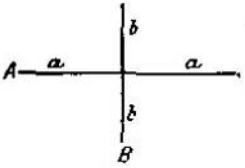


empotradas en uno de sus extremos, de igual rigidez EJ, están articuladas en el punto C, del que cuelga el peso P. Calcular el descenso del punto C.



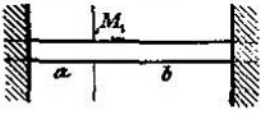
421. Resolver el mismo problema anterior, pero actuando el peso P en un punto cualquiera D de la viga $\overline{AC}$.

422. Dos barras $2a$ y $2b$ simplemente apoyadas en sus extremos están cargadas uniformemente con q kg./m. y se unen entre sí en el punto de cruce. Calcular la reacción X que ejercen mutuamente en dicho punto. ¿En qué relación están las reacciones en A y B?



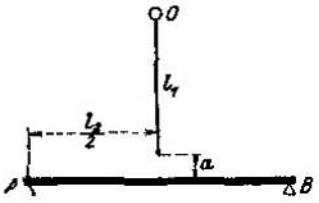
(A. Föppl, Vorlesungen, tomo 3, Festigkeitslehre.)

423. Determinar en el problema anterior la fuerza X que actúa en el punto de cruce de las barras, si se carga dicho punto con una fuerza vertical P.

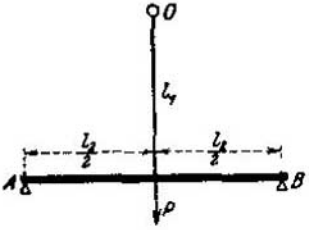


424. Una pieza empotrada en sus extremos está solicitada por un momento torsor M_t que actúa en una sección de abscisas a y b. Determinar la distribución de este momento entre los trozos a y b.

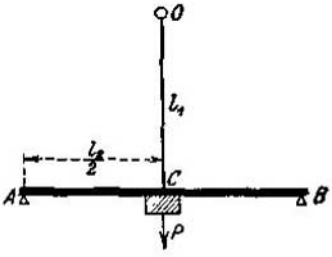
425. Una barra de longitud l_1 cuelga del punto O y su extremo inferior no llega a tocar al punto medio de una viga $\overline{AB} = l_2$ simplemente apoyada. Se une luego el punto medio de la viga con el extremo de la barra, levantando aquélla convenientemente. Calcular la tensión total S que se produce en la barra. (Sin tener en cuenta los pesos propios.)



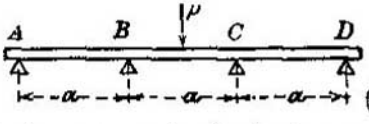
426. El punto medio de una viga simplemente apoyada $\overline{AB} = l_2$ está enlazado con el extremo de una barra de longitud l_1 que cuelga del punto O. En dicho punto medio actúa un peso P. Calcular cómo se distribuye este peso entre la viga (P_2) y la barra (P_1), así como la flecha f. (Sin tener en cuenta los pesos propios.)



427. La viga del problema anterior está apoyada en otra también simplemente apoyada de longitud l_3, normal al plano del papel y atornillada a ella en el punto C. Determinar la distribución de la carga total P entre las vigas y la barra, así como la flecha del punto C. (Sin tener en cuenta los pesos propios.)

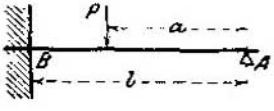


428. El peso P actúa en el punto medio de una viga de tres tramos $\overline{AD} = l = 3a$. Calcular las reacciones de los apoyos en A y B.

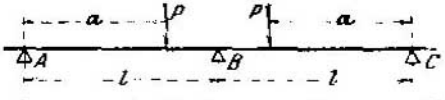


429. El mismo problema anterior, pero siendo la fuerza solicitante una carga P uniformemente repartida sobre el tramo medio.

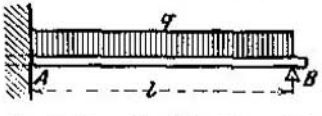
430. Un peso P insiste sobre una viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro. Hallar las reacciones en los apoyos A y B y el momento de empotramiento M_B.



431. Los pesos P cargan simétricamente sobre la viga continua de dos tramos representada en la figura. Hallar la reacción y el momento flector en el apoyo B.

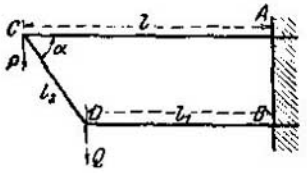


432. Una viga empotrada en un extremo y libre en el otro está sometida a la acción de una carga uniformemente repartida. Hallar las reacciones de los apoyos A y B y el momento de empotramiento en B.



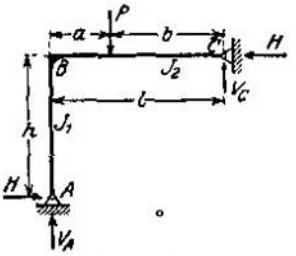
433. Una viga de longitud l y sometida a una carga uniformemente repartida de q kg./m. está sustentada con dos articulaciones fijas, pero que distan verticalmente h del eje de la viga. Determinar el empuje H que se desarrolla en las articulaciones a consecuencia de la carga dada. (Se tendrán en cuenta las fuerzas longitudinales.)

434. Dos varillas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tienen sus extremos A y B em-

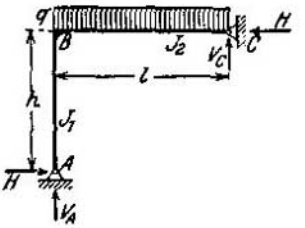


potrados y los otros dos CD articulados a una tercera varilla $\overline{CD}$. En los puntos C y D actúan los pesos P y Q. Las longitudes de las varillas son l, l_1 y l_2, y sus m. de i., J, J_1 y J_2. Hallar las reacciones en los apoyos A y B, los momentos de empotramiento M_A y M_B, la tensión total S en la varilla $\overline{CD}$ y el descenso o flecha f de los puntos C y D.

435. La figura representa un semipórtico articulado con una fuerza P que actúa en el dintel. Determinar el empuje horizontal H, las componentes verticales de las reacciones en las articulaciones V_A y V_C y el momento flector máximo en el dintel.



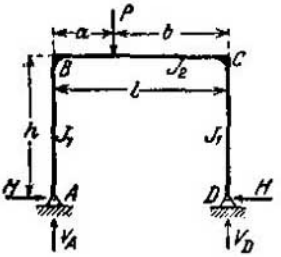
Problema 435



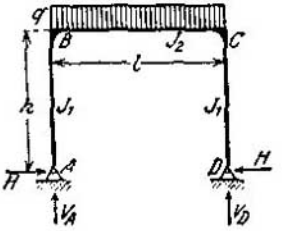
Problema 436

436. El mismo problema, pero con el dintel cargado uniformemente a razón de q kg./m. Determinar H, V_A y V_C.

437. Pórtico sustentado por articulaciones con una carga concentrada P en el dintel. Determinar H.



Problema 437

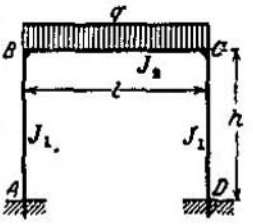


Problema 438

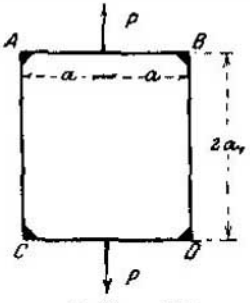
438. Resolver el mismo problema anterior, pero con una carga uniformemente repartida de q kg./m. sobre el dintel.

439. La figura representa un pórtico empotrado con una

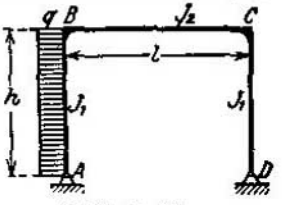
carga q kg./m. uniformemente repartida sobre el dintel. Determinar las reacciones en A y D (es decir, V_A, H, M_A) y los momentos flectores en B y C. (El módulo de elasticidad es el mismo para el dintel que para los montantes. Los m. de i. son J_1, J_2, J_1.)



440. Las fuerzas P actúan en los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de un bastidor rectangular. Los lados $\overline{AB} = \overline{CD} = 2a$ tienen un m. de i. J y un módulo de elasticidad E; los lados $\overline{AC} = \overline{BD} = 2a_1$ tienen un m. de i. J_1 y un módulo de elasticidad E_1. Calcular los momentos flectores M_A en los vértices y las flechas f_P en los puntos de aplicación de las fuerzas P.



Problema 440



Problema 441

(F. Grashof, Theor. d. Elastiz. u. Festigkeit, 2 ed., 1878.)

441. Un pórtico articulado en A y D está sometido a la acción del viento que carga a razón de q kg./m. sobre uno de los montantes. Determinar las reacciones en A y D.

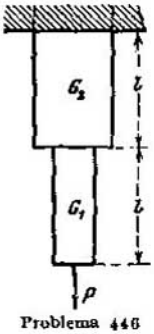
27. El trabajo elástico en las piezas rectas

442. Una barra de hierro de sección cuadrada de 2 cm. de lado está sometida a un esfuerzo de tracción $P = 4000$ kg. Calcular el trabajo elástico que absorbe cada cm.³ del material. (Módulo de elasticidad, $E = 2 \cdot 10^6$ at.)

443. Una barra de hierro dulce de longitud $l = 2{,}5$ m., cuya sección es una elipse de semiejes $b = 4$ cm., $c = 3$ cm., experimenta un alargamiento de $\Delta l = 0{,}05$ cm. Hallar el trabajo elástico de la barra. ($E = 2 \cdot 10^6$ at.)

444. Una barra prismática de longitud l, sección F y peso G cuelga libremente de uno de sus extremos. Calcular el trabajo elástico debido al peso propio.

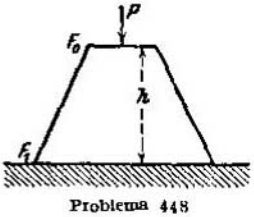
445. Un cuerpo de igual resistencia a la tracción respecto a su propio peso, cuya longitud es l, sección inicial F_0 y peso específico γ, está sometido a la acción de la fuerza central P. Calcular el trabajo elástico.



Problema 446

446. Dos barras de igual longitud y material, de pesos G_1 y G_2, situadas una a continuación de otra están cargadas con la fuerza P. Hallar la magnitud de P, bajo la condición de que en ambas barras el trabajo elástico por unidad de volumen sea el mismo. (Primeramente de un modo general; después para $G_2 = 2\,G_1$.)

447. Un cono circular recto, de altura h y peso G, cuelga de su base cuyo radio es r y está sometido tan sólo a la acción de la gravedad. Calcular el trabajo elástico.



Problema 448

448. La fuerza P actúa en la base superior de un tronco de cono. Hallar el trabajo elástico de la fuerza, despreciando el peso propio del cono.

449. Hallar el trabajo elástico en una viga simplemente apoyada y cargada en su punto medio con una fuerza que produce la flecha f. La sección es constante.

450. Calcular el trabajo elástico en una viga simplemente apoyada y cargada con una fuerza aislada en función de las expresiones del momento flector.

451. Una viga simplemente apoyada, de sección constante (m. de i. J respecto a la línea neutra) y de longitud l, está cargada uniformemente con q kg./m. Calcular el trabajo elástico.

452. La carga uniformemente repartida del problema **451** se extiende solamente en una longitud a contada a partir de un apoyo. Determinar el trabajo elástico.

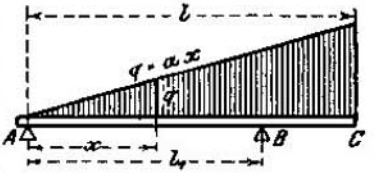
453. Calcular el trabajo de deformación de la viga del problema **451** en función de la flecha en el punto medio.

454. Calcular el trabajo elástico de una viga simplemente apoyada y cargada uniformemente con q por unidad de longitud y, además, con una fuerza aislada P de abscisa cualquiera.

455. Hallar el trabajo elástico en una viga simplemente apoyada y cargada tal como se indica en la figura.

456. Calcular el trabajo de deformación de una viga simplemente apoyada, sometida a la acción de la fuerza P que actúa en el extremo del trozo volado BC.

457. Hallar el trabajo elástico en una viga simplemente apoyada en un tramo volado y sometida a una carga triangular.

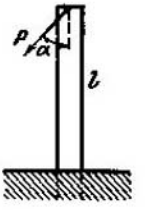


458. Una viga simplemente apoyada de sección rectangular está sometida a la acción de una fuerza aislada. Determinar el trabajo elástico debido exclusivamente a las tensiones tangenciales.

459. Una barra redonda simplemente apoyada está cargada uniformemente con q kg./m. Calcular el trabajo elástico de las tensiones tangenciales.

460. Calcular el trabajo de deformación de las tensiones tangenciales en una viga de sección rectangular sometida a flexión por una carga cualquiera.

461. Hallar el trabajo elástico de una barra empotrada por uno de sus extremos y cargada en el otro con una fuerza P. La barra tiene sección circular y su forma es la de un sólido de igual resistencia a la flexión.



462. Una barra de corta longitud l, sección F y radio de giro i está sometida a la acción de una fuerza P inclinada α respecto al eje. Calcular el trabajo elástico.

463. Una viga empotrada en un extremo, de sección constante y simétrica (m. de i. J), está cargada desde su extremo libre hasta una distancia a con una carga uniforme q por unidad de longitud. Calcular el trabajo elástico.

464. ¿Cómo se altera el resultado del problema anterior si se supone que además actúa en C una fuerza aislada P?

465. Hallar el trabajo de deformación de una viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro, cargada en su punto medio.

466. Calcular el trabajo elástico en una viga empotrada en sus extremos, cargada con una fuerza P que dista a y b de los apoyos.

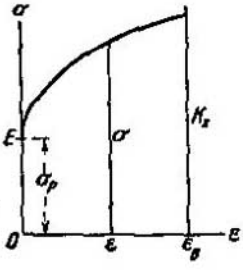
467. Un árbol de transmisión de longitud l y radio r experimenta un giro total de torsión φ^0 por la acción de un momento torsor M. Hallar el trabajo elástico que absorbe el árbol.

468. En la prensa de volante del problema **335**, el disco S efectúa por su acción de volante revoluciones rápidas, a conse-

cuencia de las cuales el husillo ABC produce una compresión fuerte que se utiliza en la placa C destinada a estampar metales. Sea P la presión transmitida por A. Calcular el trabajo elástico que absorben el husillo y el bastidor de la prensa.

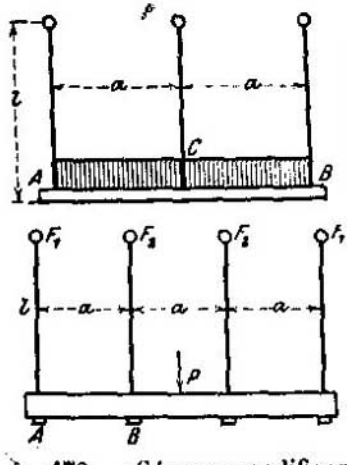
(Schlesinger, ZVDI, tomo 53, pág. 287, 1909.)

469. Según O. Intze (Wochenschr. d. VDI, tomo 7, página 446, 1882), para el hierro, el diagrama de los alargamientos ε y las tensiones correspondientes σ más allá del límite de proporcionalidad puede representarse aproximadamente por una parábola de vértice E. Calcular el trabajo elástico en una barra estirada, de sección F y longitud l, sometida a la acción de una carga P que la solicita con esfuerzos superiores al límite de proporcionalidad. Se suponen conocidos la carga de rotura por tracción K_z, el alargamiento de rotura ε_B y la carga límite de pro-porcionalidad σ_P.



28. El principio del trabajo elástico mínimo

(principio de Castigliano)



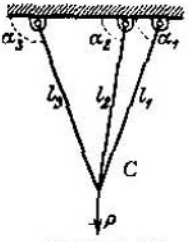
470. La viga $\overline{AB} = 2a$ cargada uniformemente con q kg./m. está colgada de las tres barras A, B y C de igual longitud y sección. Calcular los esfuerzos de tracción que se desarrollan en las barras.

471. Una viga está simétricamente colgada de cuatro varillas de longitud l y secciones F_1, F_2, F_2, F_1 y cargada en su punto medio con la fuerza P. Determinar los esfuerzos de tracción en las varillas, suponiendo que la viga es rígida, esto es, que sólo son elásticas dichas varillas.

472. ¿Cómo se modificará el resultado del problema anterior, suponiendo que la viga también es elástica? (¡Resolverlo, además, por el método de las deformaciones!)

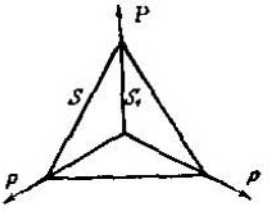
473. Tres barras del mismo material, de longitudes l_1, l_2, l_3

y secciones F_1, F_2, F_3, articuladas en sus extremos superiores soportan conjuntamente la carga P. Se dan los ángulos de posición α_1, α_2, α_3. Hallar los esfuerzos totales de tracción en las barras.



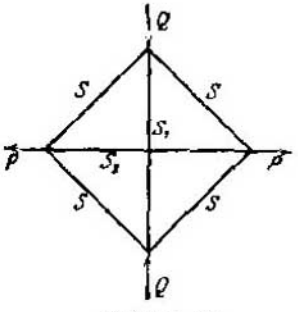
Problema 473

474. El entramado regular, compuesto de seis varillas articuladas entre sí, representado en la figura, está solicitado por tres fuerzas iguales P que están en equilibrio. Todas las varillas tienen la misma sección y son de idéntico material. Hallar las tensiones totales S y S_1.

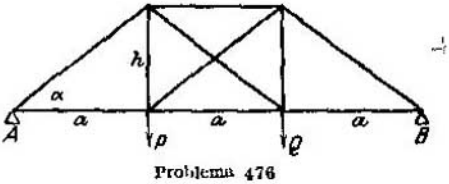


Problema 474

475. Un entramado compuesto de seis varillas articuladas entre sí está solicitado por cuatro fuerzas P y Q iguales dos a dos que actúan en los vértices exteriores. La sección y el módulo de elasticidad de las varillas son iguales. Hallar los esfuerzos de tracción o tensiones totales S, S_1 y S_2.



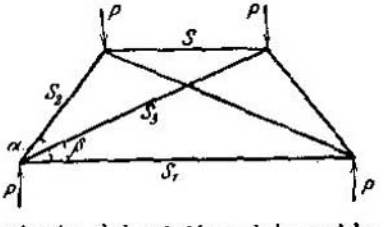
Problema 475



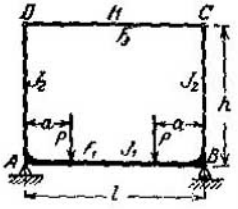
Problema 476

476. Determinar las tensiones totales de las varillas del entramado representado en la figura, que contiene una varilla superabundante y está, además, cargado disimétricamente. Las secciones de las varillas son distintas; el material es el mismo.

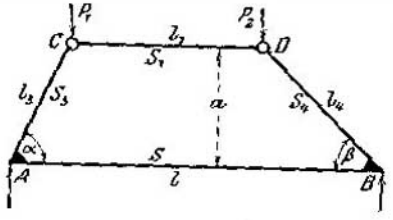
477. Un entramado formado por seis varillas de la misma sección formando un trapecio con sus dos diagonales está solicitado por cuatro fuerzas iguales P. Hallar las tensiones totales de las varillas.



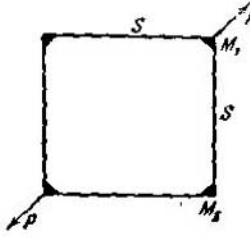
478. Determinar el empuje H y los momentos de empotramiento del pórtico del problema **439** aplicando el principio de Castigliano.



479. La sección de un puente de hierro se compone de una vigueta transversal $\overline{AB} = 2l$ (sección F_1, m. de i. J_1) unida rígidamente a dos montantes $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ (m. de i. J_2) y de una riostra $\overline{CD}$ (sección F_3) articulada a los montantes en los puntos C y D. Las fuerzas solicitantes P actúan simétricamente sobre la vigueta transversal $\overline{AB}$. Calcular la compresión total H que se produce en la riostra $\overline{CD}$. (El módulo de elasticidad es el mismo para todas las piezas.)

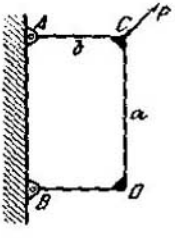


480. Un entramado en forma de trapecio de lados desiguales está solicitado por las fuerzas P_1 y P_2. A y B son nudos rígidos, C y D son articulaciones. Todas las varillas tienen la misma sección. Calcular las tensiones totales S, S_1, S_3 y S_4, así como los momentos de empotramiento en A y B.



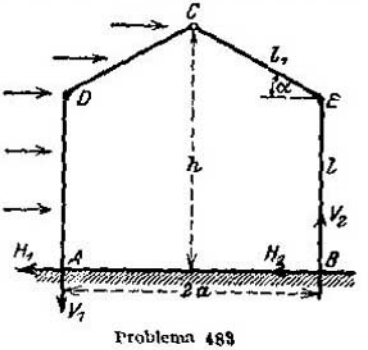
481. Un bastidor cuadrado está solicitado por las fuerzas P que actúan según una de sus diagonales. Hallar las tensiones totales S de los lados y los momentos de empotramiento en los vértices M_1 y M_2.

(F. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, 2 ed., 1878.)



482. Un bastidor $ACDB$, articulado en los puntos A y B y formado de barras de la misma sección F, está solicitado por la fuerza P que actúa en C con una inclinación α respecto a la dirección $\overline{AB}$. Determinar las tensiones totales de las varillas y los momentos en los vértices C y D.

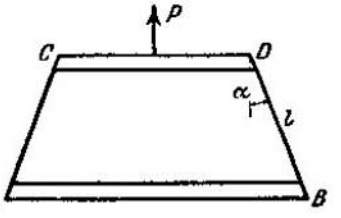
483. El pórtico representado en la figura está empotrado en A y B y articulado en C. Sobre él



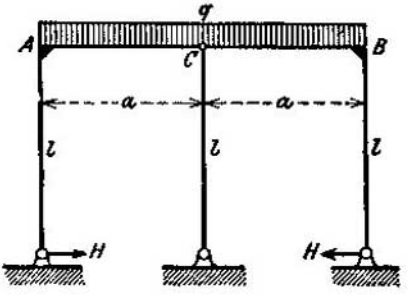
Problema 483

actúa en dirección horizontal una presión de viento de q kg./m. Calcular las reacciones en los empotramientos A y B (o sea H_1, V_1, M_1 y V_2, H_2, M_2), los momentos M_3 y M_4 en los vértices D y E y la fuerza que obra en la articulación C. Todas las piezas son de igual sección y módulo de elasticidad.

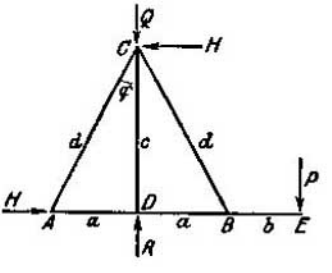
484. Un bastidor de máquina en forma de trapecio isósceles está solicitado por la fuerza P que actúa en el punto medio de la cabeza superior. Las dos cabezas son tan robustas que su deformación es despreciable. El bastidor descansa sobre un suelo perfectamente rígido. Calcular los esfuerzos S que sufren las barras laterales y los momentos M_1 y M_2 en los vértices A y C.



485. Las cabezas $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ de un pórtico triple sustentado por apoyos articulados están sometidas a la acción de una carga uniformemente repartida de q kg./m. El nudo C es articulado. Calcular los empujes horizontales H, las reacciones en A y B, así como el momento M_0 en el vértice A. (El módulo de elasticidad E es el mismo para todas las piezas.)



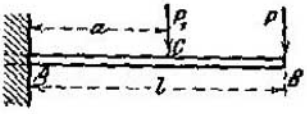
486. El triángulo isósceles ABC está arriostrado con la barra $\overline{CD} = c$ unida rígidamente a la viga $\overline{AB}$ en el punto D. El triángulo está solicitado por las fuerzas horizontales H y las verticales P, Q, R, indicadas en la figura. Determinar los esfuerzos S_1 en $\overline{CD}$, S_2 en $\overline{AC}$, S_3 en $\overline{BC}$, S_4 en $\overline{AB}$ y el momento en el punto D.



(L. Vianello, ZVDI, tomo 41, pág. 1275; 1897.)

29. La derivada del trabajo elástico

Los problemas que siguen se resolverán utilizando la ecuación (103)

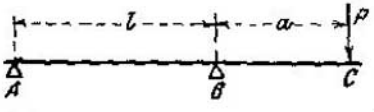


487. Calcular las flechas correspondientes a los puntos de acción de las fuerzas P y P_1.

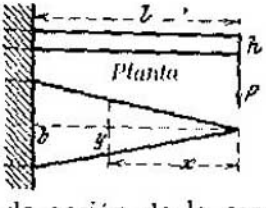
488. Calcular la flecha bajo la fuerza P en una viga simplemente apoyada, de luz l y momento de inercia J, siendo a y b las distancias de P a los apoyos.

489. Calcular la flecha, bajo la fuerza P que actúa en el punto medio de una viga simplemente apoyada, de luz l y momento de inercia J, cargada, además, uniformemente con q kg. por unidad de longitud.

490. Calcular la flecha f en el punto de acción de la fuerza P que actúa sobre una viga empotrada en sus extremos, de luz l y m. de i. J, siendo a y b las distancias de P a los apoyos.



491. Una viga de sección constante se apoya simplemente en A y B y está solicitada en C por la fuerza P. Calcular la flecha del punto C.



492. Un resorte de espesor h y planta triangular (véase la figura) está solicitado por la fuerza P que actúa en el vértice. Hallar la flecha en dicho vértice.

493. Calcular la flecha en el punto de acción de la carga P, en el problema **430**.

494. Una viga simplemente apoyada está solicitada por una carga uniformemente repartida. Calcular la flecha f en un punto que diste a y b de los apoyos.

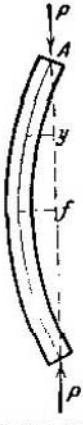
(Véanse más problemas de aplicación en los párrafos **30** y **31**.)

X. Varillas delgadas de directriz curva

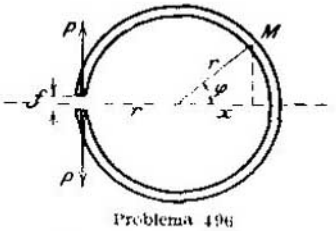
30. Problemas isostáticos

495. Una varilla cuyo eje es un arco de circunferencia de radio ϱ_0 está sometida a la acción de la fuerza P axial que actúa en el centro de las secciones. Hallar la ecuación de la línea elástica y la flecha f en el punto medio.

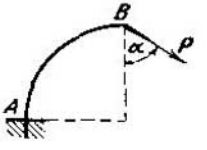
496. Un muelle circular se corta en una sección quedando sus extremos separados por el segmento f. Calcular las fuerzas P necesarias para conseguir ese efecto. (Teniendo en cuenta las fuerzas axiales.)



Prob.ª 495

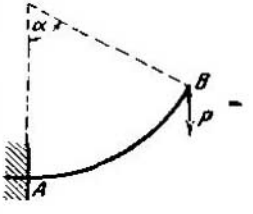


Problema 496



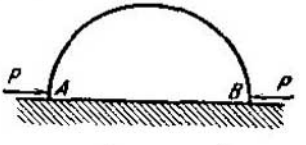
Problema 497

497. Una varilla elástica en forma de cuadrante está empotrada en uno de sus extremos A, y en el otro B actúa una fuerza P con la inclinación α respecto a la vertical. Calcular las componentes horizontal y vertical del desplazamiento de B.

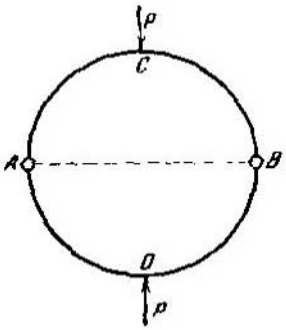


498. La varilla elástica AB, que tiene forma de arco de circunferencia, está sometida a la acción de la fuerza vertical P actuando en el punto B. Determinar las componentes horizontal u y vertical f del desplazamiento de B.

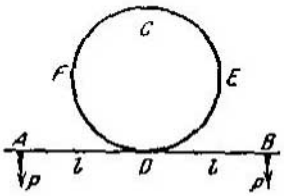
499. Una plancha semicilíndrica pesada, de poco espesor, reposa sobre un plano horizontal perfectamente liso. En los puntos A y B han de actuar dos fuerzas horizontales P que impidan el aumento del diámetro $\overline{AB}$ provocado por el peso. Calcular el valor de las fuerzas P.



500. Un anillo elástico se corta en dos secciones diametralmente opuestas A y B poniendo en ellas sendas articulaciones. En los extremos del diámetro CD (normal a AB) actúan las fuerzas de compresión P. Calcular las variaciones de longitud que experimentan los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

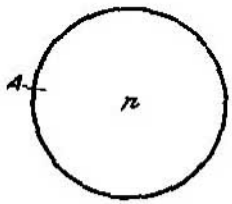


Problema 500

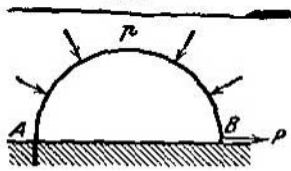


Problema 501

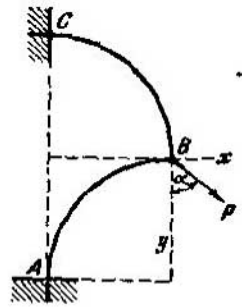
501. Un alambre elástico está arrollado en la forma $ADECFDB$ que indica la figura. Se cuelga del punto C y se carga en cada uno de los puntos A y B con pesos P. Calcular lo que se aproximan y lo que descienden dichos extremos.



502. Un depósito cilíndrico de longitud l se corta por la generatriz A. Calcular la abertura que tomará la fuga A a causa de la presión interna p (por unidad de superficie) actuando en el depósito.



503. Un resorte semicircular está empotrado en A y sometido en B a la acción de una fuerza P en la dirección del diámetro $\overline{AB}$, y además experimenta una presión exterior p (por unidad de longitud). Calcular cuál ha de ser esta presión para que el punto B no salga del plano AB, y calcular además el desplazamiento de B, el máximo momento flector que sufre el resorte y la sección de momento nulo.

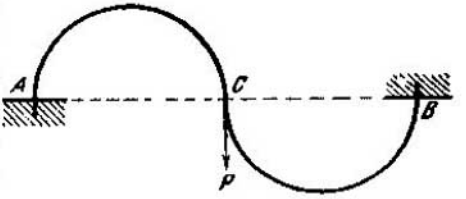


31. Problemas hiperestáticos

504. La fuerza P actúa en la articulación B de unión de un fleje formado por dos cuadrantes de circunferencia. Hallar en magnitud y dirección el desplazamiento del punto B.

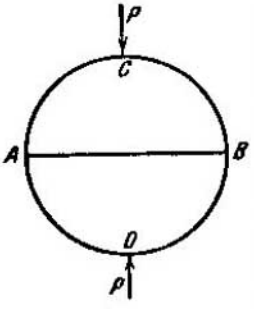
(E. Brauer, Festigkeitslehre, 1905.)

505. Una varilla elástica y delgada ACB, formada por dos semicircunferencias, tiene sus extremos A y B empotrados verticalmente. Hallar el descenso del punto C, bajo la acciónde la fuerza vertical P.

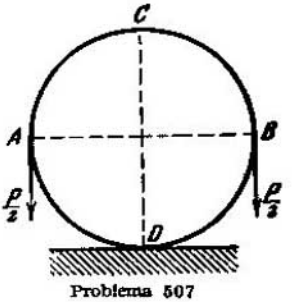


506. Un anillo elástico, arriostrado con un tirante diametral $\overline{AB}$, está sometido a la acción de las fuerzas P. Calcular los momentos flectores en B y C, y la tracción total S del tirante.

507. Las dos fuerzas $P/2$ actúan en los extremos del diámetro horizontal de un anillo elástico apoyado en D. Hallar el alargamiento y el acortamiento de los diámetros respectivos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, así como el máximo momento flector que sufre el anillo.

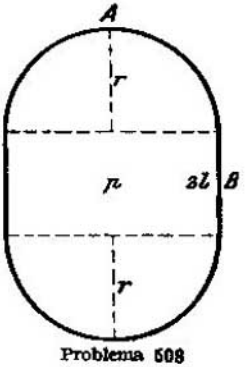


Problema 506



Problema 507

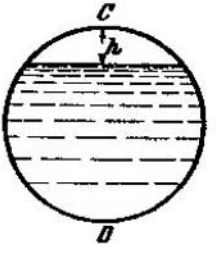
508. Un depósito cilíndrico de pared delgada tiene la sección indicada en la figura. En el interior reina una presión p (por unidad de longitud de perímetro). Hallar el máximo momento flector y los desplazamientos de deformación en los puntos A y B. (M. Westphal, ZVDI, t. 53, pág. 383, 1909.)

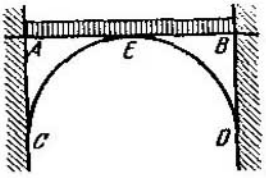


Problema 508

509. Un tubo de pared delgada se apoya sobre un plano horizontal por una de sus generatrices y está sometido a la acción de su peso propio. Hallar la ley de variación del momento flector y determinar especialmente los puntosen quedichomomento es máximo y es nulo.

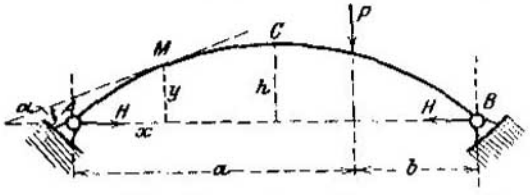
510. Un recipiente cilíndrico de longitud l está parcialmente lleno de líquido. Calcular la fuerza normal (axial) y los momentos flectores en las secciones C y D, despreciando el efecto de empotramiento de los anillos de sujeción o cierres laterales del recipiente. (E. Brauer, Festigkeitslehre, 1905.)





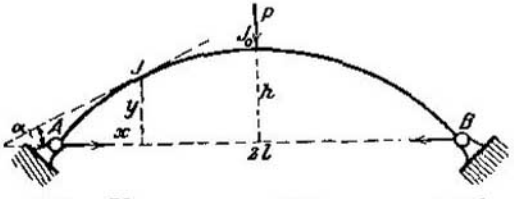
511. Una viga $\overline{AB}$ empotrada en sus extremos y cargada uniformemente se sostiene por su punto medio E en un arco semicircular empotrado en C y D. Calcular las reacciones y los momentos de empotramiento en los puntos A, B, C, D.

512. El arco parabólico ACB de luz $2l = a + b$ está sometido a la acción de la fuerza aislada P (de abscisas a y b). Calcular el empuje horizontal H, suponiendo que el m. de i. J en una sección cualquiera M es igual a $J_0 \sec \alpha$, siendo J_0 el m. de i. en la clave C, y α la inclinación de la tangente en M.

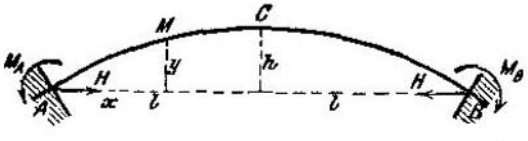


513. Resolver el problema anterior, suponiendo que hay, además, otra carga simétrica a la P y que las articulaciones A y B están enlazadas con un tirante de hierro de sección F.

514. Un arco parabólico de flecha h y luz $2l$, articulado en sus apoyos, está sometido en su punto medio a la acción de la fuerza aislada P. El m. de i. J de una sección cualquiera es igual a $J_0 \sec \alpha$, siendo J_0 el m. de i. en la clave, y α la inclinación de la tangente. Calcular la deformación f en la clave.



515. Un arco parabólico empotrado en sus apoyos A y B está sometido a la acción de una carga repartida a razón de q por unidad de longitud de la cuerda $\overline{AB}$. La sección del arco es constante. Calcular los momentos de empotramiento M_A y M_B y el empuje horizontal H.



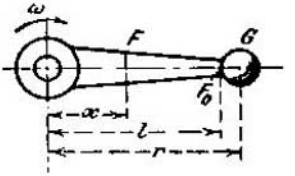
516. ¿Qué modificaciones experimenta la solución del problema anterior cuando el arco tiene, referido a los ejes coordenados que pasan por C, la ecuación $F(\xi, \eta) = 0$?

XI. Resistencia dinámica

32. Tensiones en sólidos móviles

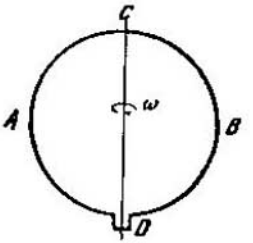
517. Una varilla prismática de longitud l y peso específico γ gira alrededor de su extremo O en un plano horizontal. Hallar el número de vueltas por minuto n necesario para que la carga unitaria de trabajo tome el valor σ_0 y el alargamiento de la varilla.

518. Una barra de sección variable y terminada por uno de sus extremos con una bola de peso G gira alrededor de un eje que pasa por su otro extremo con la velocidad angular ω. Hallar la ley de variación de las secciones F en función de la distancia x al eje para que la tensión σ_0 sea igual en todas ellas.

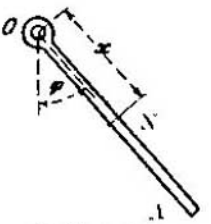


519. Un anillo delgado de peso G gira alrededor de su diámetro vertical $\overline{CD}$ con la velocidad angular ω. Calcular los esfuerzos normales y los momentos flectores en las secciones C, B y D, y la variación de longitud de los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

(E. Brauer, Festikeitslehre, 1905.)



520. Una barra $\overline{OA} = l$ de peso G está articulada en el punto O y se abandona a la acción de la gravedad. Calcular, en la sección N, a la distancia x de O el momento flector M. Hallar la sección correspondiente al valor máximo del momento flector.



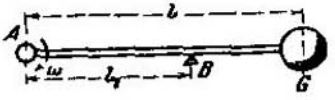
Problema 520

521. Calcular en el problema anterior el esfuerzo cortante en la sección N y determinar la sección en que dicho valor es máximo.

522. Determinar en el problema **520** el esfuerzo normal S en una sección cualquiera N, sabiendo que la barra parte del reposo en su posición inicial $\varphi = \alpha$.

523. Una varilla semicircular rígida gira alrededor de uno de sus extremos A con velocidad angular constante ω sobre un plano horizontal perfectamente liso. Hallar la sección correspondiente al momento flector máximo.

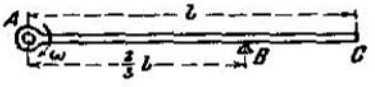
(E. J. Routh, Dynamik, t. 1, 1898.)



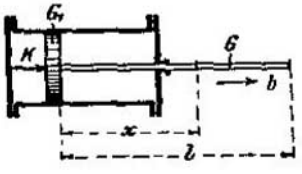
524. Una varilla, sin peso, que en su extremo lleva el peso G gira alrededor de su otro extremo A con una velocidad angular ω en un plano horizontal y se detiene súbitamente por efecto del obstáculo B. Hallar la sección de momento flector máximo y el valor de éste.

525. Un volante que da n revoluciones por minuto se para repentinamente sujetando un punto B de uno de sus radios. Hallar el momento flector máximo que sufre el brazo.

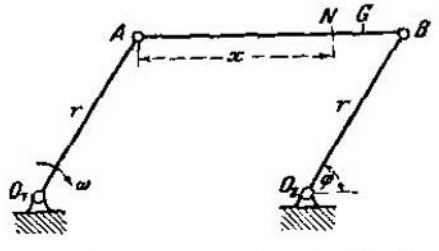
526. Una barra $\overline{AC} = l$ de sección constante y peso G gira alrededor de uno de sus extremos A con una velocidad angular ω sobre un plano horizontal, y se detiene repentinamente por efecto del obstáculo B a la distancia $AB = 2l/3$ de A. Hallar la sección donde se desarrolla el máximo momento flector y calcular el valor del mismo.



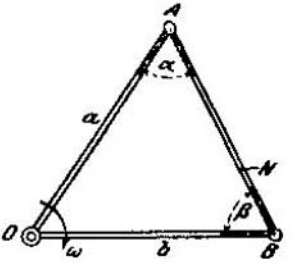
527. Un émbolo de peso G_1 y su vástago de peso G y longitud l son accionados por la fuerza K y toman una aceleración b. Calcular en este instante el esfuerzo normal S en una sección cualquiera x del vástago. ¿A qué sección corresponderá el máximo de S?

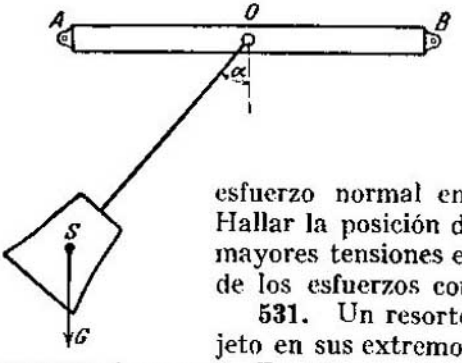


528. Una barra $\overline{AB}$ de peso G y longitud l se mueve accionada por dos manivelas iguales r. Las velocidades angulares ω de ambas manivelas son iguales. Además, $\overline{AB} = \overline{O_1O_2}$. Determinar el momento flector M, el esfuerzo normal S y el cortante Q en una sección cualquiera N de la barra, a la distancia x del punto A debido a las fuerzas de inercia, y hallar las secciones donde son máximos y mínimos estos algoritmos mecánicos.



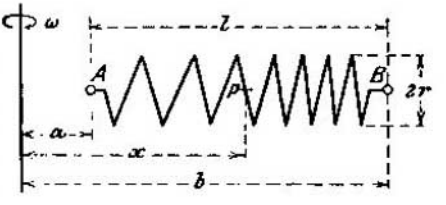
529. Una barra $\overline{AB} = l$ de masa G/g está unida al punto O por intermedio de dos varillas a y b, que se suponen sin peso, y gira alrededor de dicho punto O con una velocidad angular constante ω sobre un plano horizontal perfectamente liso. Calcular el momento flector M, el esfuerzo normal S y el esfuerzo cortante Q en una sección cualquiera N de la barra. Hallar las secciones en donde M es máximo y S y Q mínimos.





530. Del punto medio O de una viga AB cuelga una campana cuya oscilación máxima forma con la vertical el ángulo α. Calcular el momento flector y el esfuerzo normal en la sección O de la viga. Hallar la posición de la campana que produce mayores tensiones en la misma. (Se prescindirá de los esfuerzos cortantes que la regla sufre.)

531. Un resorte helicoidal de radio $2r$, sujeto en sus extremos A y B, produce en estos puntos esfuerzos P_0. En estas condiciones, se hace que el sistema gire alrededor de un eje perpendicular a $\overline{AB}$, con la velocidad angular constante ω. Determinar en un punto cualquiera P del resorte la fuerza elástica P en función de x, y los esfuerzos P_A y P_B en los puntos A y B.



(M. Tolle, ZVDI, tomo 42, pág. 1994; 1908.)

532. En el resorte del ejemplo anterior se supone $P_0 = 0$ y además el extremo A libre. Determinar el desplazamiento del punto A producido por el giro, y la fuerza elástica en el punto B.

33. Vibraciones elásticas

533. Se hace vibrar una varilla recta empotrada en un extremo y libre en el otro. Establecer la ecuación diferencial del movimiento vibratorio y determinar el número de oscilaciones por segundo (o frecuencia).

534. Una masa M está sujeta al extremo libre de una viga empotrada por su otro extremo, de longitud l y m. de i. de la sección J, que efectúa oscilaciones de periodo T. Demostrar que el módulo de elasticidad de la viga es

$$E = \frac{4\pi^2 M l^3}{3 J T^2},$$

despreciando el efecto de su propia masa.

535. Una masa M, sujeta al punto medio de una viga simplemente apoyada, de luz l, efectúa oscilaciones de periodo T. Demostrar que la rigidez de la viga es

$$EJ = \frac{\pi^2 M l^3}{192\, T^2},$$

prescindiendo de su masa propia.

536. Demostrar que la frecuencia circular (número de vibraciones en 2π segundos) de una varilla que oscila viene dada por

$$\omega^2 = \frac{\int EJ\, y''^2\, dx}{\int \varrho\, y^2\, dx} \qquad \text{(a)}$$

Cuando en el punto x_0 se sujeta una masa adicional m que oscila con la varilla, el valor de ω^2 es

$$\omega^2 = \frac{\int EJ\, y''^2\, dx}{\int \varrho\, y^2\, dx + m\, y^2(x_0)} \qquad \text{(b)}$$

En estas ecuaciones, $y = y(x)$ es la ecuación del movimiento vibratorio (determinada o conocida, salvo un factor constante), EJ es la rigidez y ϱ la masa por unidad de longitud. Las integrales se extienden a toda la longitud de la pieza.

[Estas ecuaciones pueden utilizarse para el cálculo aproximado de las vibraciones, sustituyendo en vez de $y = y(x)$ una expresión cuya forma se aproxime a la efectiva y que satisfaga especialmente a las condiciones límites.]

537. Demostrar que la frecuencia o número de oscilaciones por segundo en una viga simplemente apoyada, de masa M y que lleva en su punto medio una masa m, viene dada aproximadamente por

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{21\, EJ}{(125\, m/256 + 31\, M/126)\, l^3}}$$

538. Demostrar que el número de oscilaciones por segundo en una viga de masa M, empotrada por un extremo y que en el otro libre lleva una masa m, viene dado por

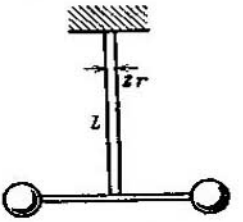
$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\, EJ}{(m + 33\, M/140)\, l^3}}$$

539. Demostrar que el número de oscilaciones por segundo en una viga de masa M, empotrada en sus dos extremos y que en el punto medio lleva una masa m, viene dado por

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{192\,EJ}{(m + 13\,M/35)\,l^3}}$$

540. Una viga simplemente apoyada, de masa M, debe soportar en su punto medio una máquina de vapor de masa m. Determinar el m. de i. de la sección de la viga, bajo la condición de que el número de revoluciones n_1 de la máquina sea $1/p$ del número de oscilaciones de la viga.

541. Una viga de peso G descansa sobre un plano horizontal. Después de sujetar convenientemente sus extremos, se retira súbitamente el plano. Hallar la flecha máxima y el período de las oscilaciones de la viga.



542. De un alambre de radio r y longitud l cuelga una varilla que lleva en sus extremos dos esferas pesadas que están en equilibrio. Se hace girar la varilla el ángulo φ y, al soltarla, efectúa oscilaciones en un plano horizontal. Determinar el período. (Se tendrá sólo en cuenta el m. de i. J de las esferas.)

543. Un cable vertical de longitud l y de peso γ por unidad de longitud efectúa oscilaciones de alargamiento y contracción en el sentido de su longitud. En un cierto instante, v es la velocidad de su punto inferior. Determinar la tracción total del cable a la distancia x del punto inferior y en el punto superior.

544. Demostrar que el número de oscilaciones por segundo (oscilaciones de alargamiento y contracción en sentido radial) en un anillo circular elástico, de densidad ϱ y de radio medio r, viene dado por

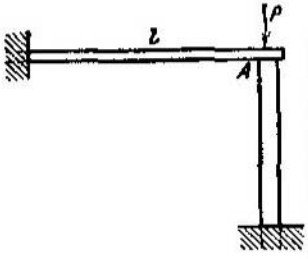
$$n = \frac{1}{2\pi r}\sqrt{\frac{E}{\varrho}}$$

34. Resistencia al choque

Definición. Si Q es la carga súbita o dinámica que actúa sobre una viga, y nQ la carga estática que produce la misma deformación elástica en el mismo sitio, n recibe el nombre de **factor dinámico** [véanse las ecuaciones (106) a (112)].

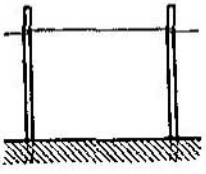
545. ¿Qué valor tiene el factor dinámico cuando una carga actúa súbitamente con todo su valor, pero sin velocidad? (Poncelet.)

546. Demostrar que la inversión súbita del sentido de una carga produce una deformación triple que la de la misma carga supuesta estática.

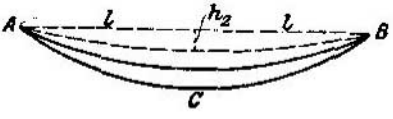


547. El extremo libre de una viga de luz l, empotrada por su otro extremo, está sostenido por un apoyo aislado y soporta el peso P. Calcular el descenso f del punto A en el instante en que se retira súbitamente el apoyo.

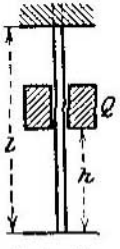
548. El esfuerzo de tracción de un hilo telegráfico es S. Calcular la fuerza que producirá flexión en cada poste al romperse el hilo.



549. El cable del problema **73**, además de su peso propio soporta una carga de nieve de q_1 por unidad de longitud. Suponiendo que la nieve cae repentinamente del cable, éste se recoge y toma una flecha menor h_2. Calcularla.



550. Hallar el valor que podrá alcanzar la fuerza P del problema **371** para que al romperse el tirante $\overline{AC}$ sobrevenga también la rotura del brazo de fundición $\overline{AB}$, cuyo ancho B vale 4,6 cm. (Carga de rotura por flexión, $K_b = 2580$ at.)



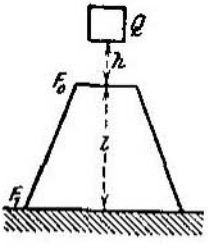
Prob.ª 551

551. El peso Q cae de la altura h y choca contra la sección inferior de una barra prismática de sección F, longitud l y peso G. Hallar el factor dinámico.

(A. Zschetzsche, ZVDI, tomo 38, pág. 139, 1894.)

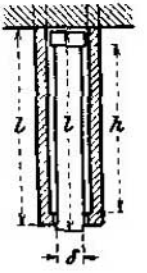
552. Una barra de prueba sometida a la acción de una carga estática se rompe al cabo de 10 minutos, con un alargamiento $\varepsilon = 0{,}25$. La misma barra sometida a la prueba dinámica se rompe a los 0,0025 segundos con el mismo alargamiento Hallar las velocidades de alargamiento en ambos casos.

(R. Planck, Forschungsarb. a. d. Gebiete des Ing.-Wesens, cuaderno 133, 1913.)



553. Sobre una pirámide truncada de altura l y secciones extremas F_0 y F_1 cae desde la altura h un peso Q. Calcular el factor dinámico.

554. En el interior de un cilindro hueco de fundición de longitud $l = 4$ m., diámetro exterior $D = 12$ cm. y diámetro interior $d = 8$ cm., hay otro cilindro también de fundición, de la misma longitud y de diámetro $\delta = 5$ cm. Este último cilindro cae recorriendo una altura $h = 3{,}8$ m. y choca contra una arandela que lleva el primero. Hallar la tensión máxima que se produce en el cilindro hueco a consecuencia del choque. (Módulo de elasticidad, $E = 10^6$ at.; peso específico, 7,5.)



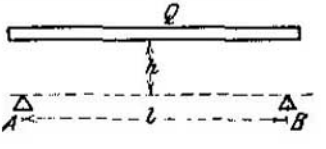
Prob.ª 555

555. ¿De qué altura máxima deberá caer sobre el suelo una barra prismática de longitud l y peso G para que en ningún punto se rebase la tensión σ_0? El suelo se supone rígido. (E. Brauer, Festigkeitslehre, 1905.)

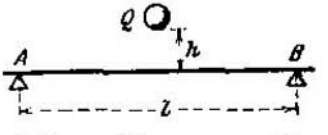
556. Un peso Q cae desde una altura h sobre el extremo libre de una viga de luz l y peso G empotrada en el otro extremo. Calcular el factor dinámico.

557. Una viga de madera, de luz $l = 2$ m., altura 20 cm. y ancho 15 cm., está empotrada en uno de sus extremos. Del extremo libre cuelga un peso $Q = 100$ kg. ¿De qué altura podrá dejarse caer este peso para que la carga máxima que se produzca en la viga no exceda de $k_b = 265$ at.? (Módulo de elasticidad, E 120 000 at.; peso específico de la madera, 0,5 kg./dm.³)

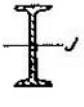
558. Una viga de peso Q cae desde la altura h sobre dos apoyos inconmovibles A y B. Determinar el factor dinámico.



559. Un peso Q cae desde una altura h sobre el punto medio de una viga simplemente apoyada, de luz l y peso G. Calcular el factor dinámico. (A. Zschetzsche, ZVDI, tomo 38, pág. 134, 1894.)

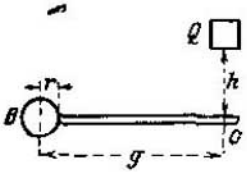


560. Un perfil de hierro laminado (altura 24 cm., sección transversal 46,4 cm.², m. de i. $J = 4288$ cm.⁴, peso por metro lineal 36,2 kg. y luz $l = 6$ m.) está simplemente apoyado en sus extremos. Del punto medio cuelga un peso $Q = 1000$ kg. ¿De qué altura deberá caer el peso para que se rompa la viga? (Carga de rotura por flexión, $K_b = 5000$ at.; módulo de elasticidad, $E = 2 \cdot 10^6$ at.)



561. Una viga empotrada en sus extremos, de peso G, experimenta el choque de un peso Q que cae de una altura h en la sección de abscisa a contada desde uno de los apoyos. Hallar el factor dinámico.

562. Un tubo de fundición de 5 m. de longitud, 30 cm. de diámetro exterior y 24 de diámetro interior, está empotrado en sus dos secciones extremas. A la distancia $a = 1$ m. de uno de los apoyos se deja caer sobre el tubo un peso $Q = 400$ kg. Hallar la altura de caída necesaria para que la carga unitaria o tensión de 700 at. no sea rebasada en ningún punto del material. (Peso específico, 7,5 ; módulo de elasticidad, $E = 10^6$ at.)



563. Un hierro redondo empotrado en uno de sus extremos, de peso P y radio r, lleva en el otro un brazo q, sobre cuyo extremo C cae un peso Q desde la altura h. Hallar la máxima tensión que se produce en la barra.

564. Una viga simplemente apoyada, de peso G, recibe en su punto medio el choque de un peso Q. Determinar el movimiento oscilatorio de dicho punto expresando la flecha y en función del tiempo. Hallar el máximo valor de y.

(A. Gessner, ZS. d. öst. Ing. u. Arch.-Ver., tomo 58, página 665, 1906.)

565. Una barra prismática, de peso G, que cuelga libremente, recibe en su sección inferior el choque de un peso Q que cae de una altura h (véase la figura del problema **551**). Hallar el alargamiento máximo de la barra y la velocidad máxima del mismo.

566. Una barra prismática, de peso G, cuelga libremente y se apoya en su sección inferior de tal manera que por su propio peso no experimente alargamiento alguno. Suponiendo que se retira súbitamente el apoyo, calcular el alargamiento de la barra, el período de oscilación y la máxima velocidad del extremo de la barra.

PARTE SEGUNDA

Soluciones

1. Las tensiones σ y τ actúan en el área $c\sqrt{a^2+b^2}$. Cortando el prisma por el plano diagonal y estableciendo las ecuaciones de equilibrio para el trozo inferior, tendremos

$$P\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \sigma c\sqrt{a^2+b^2} = 0, \quad \text{de donde} \quad \sigma = \frac{Pa}{c(a^2+b^2)}$$

y

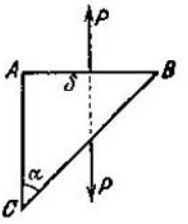
$$P\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \tau c\sqrt{a^2+b^2} = 0, \quad \text{de donde} \quad \tau = \frac{Pb}{c(a^2+b^2)}.$$

O bien, inmediatamente de la ec. (1), $\sigma = \frac{P}{ac}\operatorname{sen}^2\alpha$, $\tau = \frac{P}{ac}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, siendo $\operatorname{sen}\alpha = a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}$.

2. Las componentes de las tensiones tangenciales respecto a dos planos perpendiculares entre sí son esencialmente iguales en magnitud; luego

$$\tau\operatorname{sen}\alpha = \tau_1\operatorname{sen}\alpha_1, \text{ de donde } \tau/\tau_1 = \operatorname{sen}\alpha_1/\operatorname{sen}\alpha.$$

3. El fragmento ABC está sometido a un régimen elástico plano [ec. (1)]. Considerando una sección cualquiera por el eje, se halla que el esfuerzo tangencial por unidad de longitud es $P = pr$. Por lo tanto, el esfuerzo tangencial en la cara $\overline{BC}$ vale $P\cos\alpha$, y como la superficie es $\delta/\operatorname{sen}\alpha$, la tensión tangencial en $\overline{BC}$ valdrá $\tau = \frac{pr}{\delta}\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$. Este valor es máximo para $\alpha = 45°$. Este valor ha sido comprobado por L. Gümbel en muchas granadas que han estallado en el campo.



4. Si la carga tangencial en la cara $\overline{AB}$ ha de ser nula, la ecuación (2) nos da

$$\cos 2\alpha = 0, \qquad \text{o sea} \qquad \alpha = \pi/4.$$

La carga normal en la cara $\overline{AB}$ vale

$$\sigma = \tau\operatorname{sen} 2\alpha = \tau.$$

5. En cada cara ab actúa una fuerza normal $P_1 = P/\sqrt{2}$ y, por lo tanto, una tensión normal $\sigma = P/ab\sqrt{2}$. El régimen elástico es homogéneo, es decir que para todos los planos elásticos $\overline{AD}$ se tiene

$$\sigma = P/ab\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \tau = 0.$$

6. Sean σ y τ las tensiones en $\overline{AB}$; observemos que τ_1 debe actuar también en la cara $\overline{AC}$; el equilibrio del prisma ABC según la ec. (2) dará

$$\sigma = \tau_1 \operatorname{sen} 2\alpha, \qquad \tau = \tau_1 \cos 2\alpha,$$

de donde

$$p = \tau_1 \qquad \text{y} \qquad \varphi = 2\alpha.$$

7. Considerando el equilibrio del prisma ABC se tiene

$$\sigma = \frac{P \cos\alpha + Q}{ab \operatorname{sen}\alpha}, \qquad \tau = \frac{P}{ab}.$$

8. Si en la cara $\overline{BA}$ actúa τ_1, actuará también con el mismo valor en $\overline{BC}$. Si se escriben las ecuaciones de equilibrio proyectando sobre la normal a $\overline{AC}$ y sobre la propia dirección $\overline{AC}$, se tienen para las tensiones normal σ y tangencial τ, según la ec. (2)

$$\sigma = \sigma_1 \operatorname{sen}^2\alpha - \tau_1 \operatorname{sen} 2\alpha = -31{,}96 \text{ at.},$$

$$\tau = \sigma_1 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - \tau_1 \cos 2\alpha = 4{,}64 \text{ at.};$$

la tensión resultante es, pues,

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = 32{,}3 \text{ at.};$$

y su inclinación respecto a $\overline{AC}$, $\operatorname{tg}\varphi = \sigma/\tau$, de donde $\varphi = -81^\circ\, 44'\, 12''$.

9. Aplicando la ec. (2) se tiene

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -P_1/F \text{ (compresión)}, \quad \tau_x = P_2/F,$$

de donde

$$\sigma = \frac{P_2}{F} \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{P_1}{F} \cos^2\alpha,$$

$$\tau = \frac{P_2}{F} \cos 2\alpha + \frac{P_1}{F} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha.$$

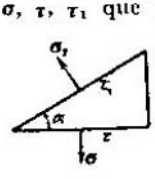
Para las tensiones principales, $\tau = 0$, de donde

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2\, P_2/P_1 = -2 \text{ y } \begin{array}{l} \alpha_1 = 58^\circ\, 16'\, 50'', \\ \alpha_2 = -31^\circ\, 43'\, 10''; \end{array}$$

los valores de las tensiones principales son:

$\sigma_1 = +68{,}8$ at. correspondiente al plano α_1,
y $\sigma_2 = -161{,}8$ at. » » » α_2.

10. Obsérvese que el estado elástico está igualmente determinado por σ, τ, τ_1 que por σ_1, τ, τ_1. Consideremos entre ambos planos un prisma rectangular y establezcamos para él las condiciones de equilibrio. En la cara derecha del prisma debe actuar también la carga tangencial τ, mientras que la normal es desconocida. Proyectando las fuerzas sobre la cara derecha del prisma e igualando a cero, se tiene (según las direcciones de τ y τ_1)

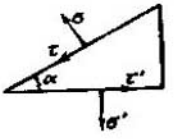


$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = 1 \pm \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha \quad \text{o bien} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma} = 1 \pm \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha.$$

11. Considerando un prisma rectangular entre ambos planos, en la cara de la derecha deberá actuar la carga tangencial τ' dirigida hacia abajo y una carga normal desconocida. Proyectando todas las fuerzas sobre la vertical tendremos, para que haya equilibrio,

$$\sigma \cos \alpha - \tau \operatorname{sen} \alpha - \sigma' \cos \alpha - \tau' \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

de donde



$$\sigma - \sigma' = (\tau + \tau') \operatorname{tg} \alpha.$$

12. Las proyecciones de p sobre las dos direcciones principales son, según la ec. (4),

$$p \cos (\delta - \alpha) = \sigma_1 \operatorname{sen} \alpha,$$

$$p \operatorname{sen} (\delta - \alpha) = \sigma_2 \cos \alpha$$

de donde

$$\operatorname{tg} (\delta - \alpha) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \operatorname{cotg} \alpha$$

y

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma_1 \operatorname{tg} \alpha + \sigma_2 \operatorname{cotg} \alpha}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Poniendo $\frac{d}{d\alpha} (\operatorname{tg} \delta) = 0$, se halla para el valor buscado de α

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\sigma_2 / \sigma_1}\,;$$

el valor correspondiente de la tensión es

$$p = \sqrt{\sigma_1^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2},$$

y su inclinación respecto al plano es

$$(\operatorname{tg} \delta)_{\min} = \frac{2 \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

13. De la ec. (3) se deduce la ecuación del lugar de N

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \operatorname{sen}^2 \varphi,$$

siendo σ y φ las coordenadas polares. ($\varphi = 90° - \alpha$.)

14. Se divide el prisma en otros dos rectangulares iguales por medio de un plano, por ejemplo perpendicular a τ_1. En este plano actuará la tensión tangencial τ_2 y la normal desconocida σ. El equilibrio de uno de los prismas para la dirección τ_1 nos da

$$-\tau_1 + \sigma \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \tau_2 \cos^2 \alpha - \tau_3 \operatorname{sen}^2 \alpha = 0,$$

y lo mismo en el otro prisma para la dirección τ_2

$$\tau_3 + \sigma \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \tau_2 \operatorname{sen}^2 \alpha - \tau_2 \cos^2 \alpha = 0.$$

Eliminando σ se obtiene para $\alpha = 60°$

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.$$

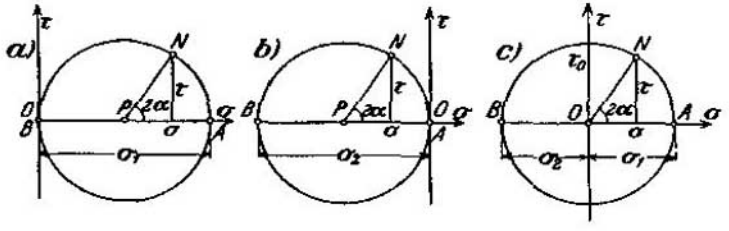
15. La demostración se deduce de las ec. (3), que pueden escribirse así:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha. \end{aligned}\right\}$$

Obsérvese, además, que en la figura $\measuredangle\, OPN = 2\alpha$, $\overline{OP} = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ y $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PN} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$. Esto sentado, las ecuaciones pueden deducirse directamente de la figura.

16. *a*) Para tracción sencilla se tiene $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$
b) Para compresión sencilla » $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 < 0$
c) Para esfuerzo cortante puro » $\sigma_1 = \tau_0$, $\sigma_2 = -\tau_0$.

Los círculos de tensiones se representan en la figura adjunta.



17. Sean σ_1, σ_2, σ_3 las tensiones principales del punto M; a_1, b_1, c_1 los cosenos directores de la normal n_1; a_2, b_2, c_2 los de n_2; las componentes de la tensión p_1 respecto a los ejes principales serán

$$p_{1x} = a_1 \sigma_1, \qquad p_{1y} = b_1 \sigma_2, \qquad p_{1z} = c_1 \sigma_3, \qquad \text{[ec. (5)]}$$

y la proyección de p_1 sobre n_2 es

$$a_2 p_{1x} + b_2 p_{1y} + c_2 p_{1z} = a_1 a_2 \sigma_1 + b_1 b_2 \sigma_2 + c_1 c_2 \sigma_3.$$

La misma expresión se obtiene proyectando p_2 sobre n_1; ambas proyecciones son, pues, iguales.

18. Sean σ_1, σ_2, σ_3 las tensiones principales del punto, y a_1, b_1, c_1 los cosenos directores de la normal al plano correspondiente a p_1; según la ec. (5), tendremos

$$p_1^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + b_1^2 \sigma_2^2 + c_1^2 \sigma_3^2$$

y del mismo modo

$$p_2^2 = a_2^2 \sigma_1^2 + b_2^2 \sigma_2^2 + c_2^2 \sigma_3^2$$
$$p_3^2 = a_3^2 \sigma_1^2 + b_3^2 \sigma_2^2 + c_3^2 \sigma_3^2.$$

Como los tres planos son normales entre sí, resulta

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1,$$

o sea

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2;$$

esta ecuación no varía escogiendo otros planos cualesquiera normales entre sí.

19. Con las mismas notaciones del problema anterior, según la ec. (6), tendremos

$$\sigma_x = a_1^2\sigma_1 + b_1^2\sigma_2 + c_1^2\sigma_3$$
$$\sigma_y = a_2^2\sigma_1 + b_2^2\sigma_2 + c_2^2\sigma_3$$
$$\sigma_z = a_3^2\sigma_1 + b_3^2\sigma_2 + c_3^2\sigma_3,$$

y por la misma razón que antes, se deduce

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

es decir que la igualdad no varía para tres planos cualesquiera normales entre sí que pasen por el punto.

20. Según las ec. (5) y (6), la tensión total del plano $ABCD$ es

$$p^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + c^2\sigma_3^2,$$

y la tensión normal,

$$\sigma = a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + c^2\sigma_3,$$

en donde

$$a^2 = \frac{n^2}{l^2 + n^2}, \quad b^2 = 0, \quad c^2 = \frac{l^2}{l^2 + n^2}.$$

Se tiene, pues,

$$p^2 = \frac{n^2\sigma_1^2 + l^2\sigma_3^2}{l^2 + n^2} \quad \text{y} \quad \sigma = \frac{n^2\sigma_1 + l^2\sigma_3}{l^2 + n^2};$$

además, según la ec. (7), $\tau^2 = p^2 - \sigma^2$, o sea que la tensión tangencial en el plano $ABCD$ será

$$\tau = \frac{ln(\sigma_1 - \sigma_3)}{l^2 + n^2}.$$

21. Si τ_x actúa en el plano xz, forzosamente actuará también en el xy, y esto mismo es aplicable a τ_y. El plano xy tiene, pues, una tensión tangencial

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = 170 \text{ at.}$$

Su ángulo con x se deduce de la ecuación $\operatorname{tg}(\tau, x) = \frac{\tau_x}{\tau_y} = \frac{8}{15}$ y es igual a $28° 4' 21''$.

Siendo σ una tensión principal y a, b, c sus cosenos directores, se verifican las ec. (8)

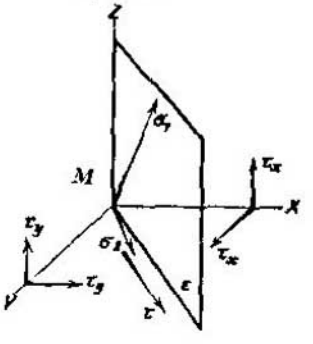
$$a(\sigma_x - \sigma) + b\tau_z + c\tau_y = 0,$$
$$c\tau_x + b(\sigma_y - \sigma) + a\tau_z = 0,$$
$$a\tau_y + b\tau_x + c(\sigma_z - \sigma) = 0.$$

Poniendo

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_z = 0,$$

queda

$$a\sigma - c\tau_y = 0, \qquad b\sigma - c\tau_x = 0,$$
$$a\tau_y + b\tau_x + c(\sigma_z - \sigma) = 0, \qquad \text{(a)}$$



y eliminando a, b, c resulta la igualdad

$$\begin{vmatrix} \sigma & 0 & -\tau_y \\ 0 & \sigma & -\tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} \equiv \sigma[\sigma\sigma_z - \sigma^2 + \tau^2] = 0.$$

Por lo tanto, las tres tensiones principales son

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau^2} = 297{,}23 \text{ at.},$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau^2} = -97{,}23 \text{ at.}, \quad \sigma_3 = 0\,;$$

y de la última de las ec. (8) y las dos primeras de las ecuaciones (a) se deduce

$$c = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} = \cos(\sigma, z),$$

de donde

$$\sphericalangle\,(\sigma_1, z) = 29^\circ\,46',$$
$$\sphericalangle\,(\sigma_2, z) = 29^\circ\,46' + 90^\circ,$$
$$\sphericalangle\,(\sigma_3, z) = 0\,.$$

La superficie de tensiones se reduce a una elipse de semiejes σ_1 y σ_2.

22. De la ec. (6)

$$\sigma = a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + c^2\sigma_3$$

se deduce

$$\xi = a\cdot\overline{MN}, \qquad \eta = b\cdot\overline{MN}, \qquad \zeta = c\cdot\overline{MN},$$

siendo la ecuación del lugar buscado

$$\xi^2\sigma_1 + \eta^2\sigma_2 + \zeta^2\sigma_3 = \pm 1,$$

que es una cuádrica con centro.

23. Como la tensión resultante $\bar{p}$ del plano tiene por componentes la normal σ y tangencial τ, la componente x de τ es

$$\tau_x = p_x - \sigma_x,$$

o sea utilizando las ec. (5) y (6)

$$\tau_x = a(\sigma_1 - \sigma) = a[\sigma_1(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + c^2\sigma_3)]$$
$$= a[b^2(\sigma_1 - \sigma_2) + c^2(\sigma_1 - \sigma_3)],$$

y del mismo modo

$$\tau_y = b[c^2(\sigma_2 - \sigma_3) + a^2(\sigma_2 - \sigma_1)], \qquad \tau_z = c[a^2(\sigma_3 - \sigma_1) + b^2(\sigma_3 - \sigma_2)],$$

resultando

$$\tau^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = b^2c^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + c^2a^2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + a^2b^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2.$$

24. Siendo α, β, γ los ángulos de n con las tres direcciones principales, las proyecciones de p sobre ellas son [véase ec. (5)]

$$p_x = \sigma_1\cos\alpha, \quad p_y = \sigma_2\cos\beta, \quad p_z = \sigma_3\cos\gamma.$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto P son

$$\xi = \overline{MN}\cdot\cos\alpha - p_x, \quad \eta = \overline{MN}\cdot\cos\beta - p_y, \quad \zeta = \overline{MN}\cdot\cos\gamma - p_z,$$

o sea $$\xi = (\sigma_2 - \sigma_1)\cos\alpha, \quad \eta = (\sigma_2 - \sigma_3)\cos\beta, \quad \zeta = 0.$$

De la ecuación $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 - \cos^2\gamma = \operatorname{sen}^2\gamma$ se deduce para lugar de los puntos P la elipse

$$\left(\frac{\xi}{\sigma_3 - \sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sigma_3 - \sigma_2}\right)^2 = \operatorname{sen}^2\gamma,$$

cuyo plano es normal a σ_3, y cuyos ejes tienen las direcciones de las tensiones principales σ_1 y σ_2.

25. Se tiene $\quad \overline{CA} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \overline{EA} = \overline{CA} \cdot \operatorname{sen}\alpha,$

$$\overline{DA} = \overline{OA} - \overline{OD} = \sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3)/2,$$

$$r^2 = \overline{DR}^2 = \overline{DE}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{DA}^2 - 2\,\overline{EA}\cdot\overline{DA}\cdot\operatorname{sen}\alpha,$$

de donde $r^2 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2/4 + a^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)$, siendo $a = \cos\alpha$.

Del mismo modo se obtiene poniendo $\overline{D_1R} = \overline{D_1F} = r_1$

$$r_1^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2/4 + c^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) \quad \text{con} \quad c = \cos\gamma.$$

Llamando, además,

$$\sphericalangle\, RDD_1 = \psi, \qquad \overline{DD_1} = m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \qquad \overline{OD} = n = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2},$$

resulta

$$r_1^2 = r^2 + m^2 - 2\,rm\cos\psi,$$

$$\overline{OR}^2 = r^2 + n^2 + 2\,rn\cos\psi,$$

de donde

$$m\cdot\overline{OR}^2 = (r^2 + mn)(m + n) - nr_1^2,$$

y sustituyendo las expresiones de m, n, r, r_1,

$\overline{OR}^2 = a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2^2 + c^2\sigma_3^2 = p^2$ con $b^2 = 1 - a^2 - c^2 = \cos^2\beta$ [según la ecuación (5)].

Además,

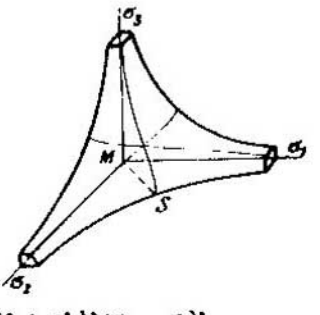
$$\overline{OP} = n + r\cos\psi = n + \frac{r^2 + m^2 - r_1^2}{2m},$$

y sustituyendo las expresiones de m, n, r, r_1,

$\overline{OP} = a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + c^2\sigma_3 = \sigma$ con $b^2 = 1 - a^2 - c^2 = \cos^2\beta$ [según la ecuación (6)].

Finalmente, $\overline{PR} = \sqrt{p^2 - \sigma^2} = \tau$ [según la ec. (7)].

26. La superficie de tensiones es una esfera de radio k. Los planos que sufren solamente tensiones tangenciales envuelven un cono cuyo eje tiene la dirección de σ_3, y cuya abertura es 90°. Las tensiones tangenciales en estos planos valen k.



27. Si p es la tensión total de un plano que pasa por M, y σ su componente normal, la tangencial será

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2,$$

y, por lo tanto, según las ec. (5) y (6),

$$\tau^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + c^2\sigma_3^2 - (a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + c^2\sigma_3)^2,$$

o teniendo en cuenta que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1:$$

$$\tau^2 = b^2c^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + c^2a^2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + a^2b^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2.$$

Las coordenadas del punto N son

$$x^2 = a^2 \varrho^2 = a^2/\tau, \quad y^2 = b^2/\tau, \quad z^2 = c^2/\tau,$$

o sea que $(\sigma_2 - \sigma_3)^2 y^2 z^2 + \sigma_3 - \sigma_1^2 z^2 x^2 + \sigma_1 - \sigma_2^2 x^2 y^2 = 1$

es la ecuación de la superficie de los puntos N. Sus intersecciones con los planos de las tensiones principales son hipérbolas equiláteras.

28. Suponiendo $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, el vértice S de la hipérbola de intersección con el plano (σ_1, σ_2) es el punto que está a la mínima distancia de M. Resulta así que $\tau_{\text{máx}} = 1/\overline{MS}^2$ es la máxima tensión tangencial en M, y vale $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$; su plano es perpendicular a $\overline{MS}$.

29. La recta g está situada en el plano principal (σ_1, σ_3). Si por ella pasa un plano arbitrario ε, cuya normal tiene por cosenos directores a, b, c, ésta será perpendicular a g, y, por lo tanto,

$$a\sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3}} + c\sqrt{\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}} = 0.$$

Ahora bien: en el plano ε actúa una tensión tangencial τ, cuya componente en la dirección de σ_2 tiene el siguiente valor (véase probl. 28):

$$\tau_y = b\,[c^2(\sigma_2 - \sigma_3) + a^2(\sigma_2 - \sigma_1)].$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior entre a y c, se deduce $\tau_y = 0$, esto es, que la tensión tangencial del plano ε está situada en el plano (σ_1, σ_3) y coincide, por lo tanto, con la recta g.

---

30. $l_1 = l(1 + \varepsilon) = 4{,}004$ m.

31. $\varepsilon = \dfrac{l_1 - l}{l} = 0{,}00213.$

32. $\varepsilon = \dfrac{l_1 - l}{l} = \dfrac{0{,}535 - 0{,}536}{0{,}536} = -0{,}00187.$

33. $\gamma = \dfrac{0{,}01}{20} = 0{,}0005.$

34. Los alargamientos en dirección de las tres aristas son

$$\varepsilon_1 = 0{,}001, \quad \varepsilon_2 = 0{,}0003, \quad \varepsilon_3 = -0{,}0005;$$

y la dilatación cúbica será, por lo tanto,

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0{,}0008 \text{ [véase ec. (12)]}.$$

35. Siendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ las dilataciones de las tres aristas, d la longitud de la diagonal antes de la deformación y d_1 después de la misma, se tendrá

$$d^2 = l^2 + m^2 + n^2,$$

$$d_1^2 = l^2(1 + \varepsilon_1)^2 + m^2(1 + \varepsilon_2)^2 + n^2(1 + \varepsilon_3)^2,$$

y despreciando las segundas potencias de las dilataciones,

$$d_1^2 = l^2 + m^2 + n^2 + 2(l^2\varepsilon_1 + m^2\varepsilon_2 + n^2\varepsilon_3).$$

La dilatación de la diagonal será, por lo tanto,

$$\varepsilon = \frac{d_1 - d}{d} = \sqrt{1 + 2\,\frac{l^2\varepsilon_1 + m^2\varepsilon_2 + n^2\varepsilon_3}{l^2 + m^2 + n^2}} - 1,$$

y como el segundo término bajo el radical es pequeño,

$$\varepsilon \approx \frac{l^2\varepsilon_1 + m^2\varepsilon_2 + n^2\varepsilon_3}{l^2 + m^2 + n^2} \approx 0{,}012.$$

36. Sea $\overline{DB} = \overline{AC} = d$, $\overline{AB} = s = d\sqrt{2}/2$; la longitud de $\overline{AB}$ después de la deformación será

$$s_1 = \sqrt{\frac{d^2}{4}(1 + \varepsilon_1)^2 + \frac{d^2}{4}(1 - \varepsilon_2)^2},$$

y despreciando las segundas potencias de las dilataciones,

$$s_1 = \frac{d}{2}\sqrt{2 + 2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2} \approx \frac{d}{2}\sqrt{2} + \frac{d}{4}\sqrt{2}\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2);$$

por lo tanto, la dilatación de $\overline{AB}$ será

$$\varepsilon = \frac{s_1 - s}{s} = \sqrt{1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2} - 1 \approx \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Las caras $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son normales entre sí antes de la deformación, después forman el ángulo $\pi/2 - \gamma$, siendo γ la distorsión.

Se tiene, pues,

$$\operatorname{tg}(ABO) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{d(1 - \varepsilon_2)/2}{d(1 + \varepsilon_1)/2} = \frac{1 - \gamma/2}{1 + \gamma/2},$$

y despreciando los productos de las cantidades pequeñas,

$$\gamma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

37. Si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ son las dilataciones principales del punto, la distorsión máxima en el mismo es una de las tres distorsiones principales (que son los valores de las distorsiones de los pares de planos inclinados $\pi/4$ respecto a los de las dilataciones principales)

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \qquad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \qquad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Si las dilataciones principales son iguales, la máxima distorsión es nula y, por lo tanto, todas las distorsiones serán nulas.

38. Sean las coordenadas de un punto de la recta

$$x = al, \qquad y = bl, \qquad z = cl.$$

Introduciendo en el ε de la ec. (11) el factor $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, resulta la ecuación del lugar que se busca

$$x^2(\varepsilon_1 - \varepsilon) + y^2(\varepsilon_2 - \varepsilon) + z^2(\varepsilon_3 - \varepsilon) = 0,$$

que representa un cono de segundo grado.

39. Como las dilataciones son nulas en la dirección de los ejes, la dilatación según una dirección arbitraria a, b, c será, según la ec. (10),

$$\varepsilon = bc\gamma_x + ca\gamma_y + ab\gamma_z.$$

Las tres distorsiones son

$$\gamma_x = -3 \text{ segundos de arco } = -0{,}0\,000\,145,$$
$$\gamma_y = +6 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = +0{,}0\,000\,290,$$
$$\gamma_z = +4 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = +0{,}0\,000\,193\,;$$

además, los cosenos directores de la diagonal $\overline{MN}$ son

$$a = \cos(NMx) = 2/\sqrt{38},\ b = \cos(NMy) = 3/\sqrt{38},\ c = \cos(NMz) = 5/\sqrt{38},$$

de donde $\varepsilon = 0{,}000\,004\,9.$

40. Según la ec. (10), se tiene

$$\varepsilon_0 = (a^2 + b^2 + c^2)\,\varepsilon_0 + \gamma_x\,(bc + ca + ab)$$

o bien

$$bc + ca + ab = 0.$$

Siendo $x = al$, $y = bl$, $z = cl$, resulta para lugar buscado el cono

$$yz + zx + xy = 0.$$

41. La dilatación ε, según ec. (10), toma el valor

$$\varepsilon = \varepsilon_0\,(a + b + c)^2.$$

La dilatación principal máxima ε_1 se obtiene cuando $a + b + c$ es máximo, teniendo en cuenta que siempre ha de verificarse la igualdad

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Resulta así

$$a_1 = b_1 = c_1 = 1/\sqrt{3}, \quad \text{y} \quad \varepsilon_1 = 3\,\varepsilon_0.$$

Siendo a_2, b_2, c_2 los cosenos directores de otra dilatación principal ε_2, se tiene

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0,$$

o sea

$$(a_2 + b_2 + c_2)/\sqrt{3} = 0,$$

y, por lo tanto, $\varepsilon_2 = 0$. Del mismo modo $\varepsilon_3 = 0$.

42. Sea a el cateto, h la altura del triángulo; antes de la deformación, $h = a/\sqrt{2}$, y después de la misma,

$$h_1^2 = a^2\,(1 + \varepsilon_1)^2 - \left[\frac{a}{\sqrt{2}}\,(1 - \varepsilon_2)\right]^2,$$

de donde, despreciando las segundas potencias de las cantidades pequeñas,

$$h_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 4\,\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2} \approx \frac{a}{\sqrt{2}}\,[1 + 2\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2],$$

y, por lo tanto, la dilatación en dirección de la altura será

$$\varepsilon = \frac{h_1 - h}{h} \approx 2\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Sea $\pi/2 - \gamma$ el ángulo abrazado por los catetos después de la deformación; tendremos

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}(1 - \varepsilon_2)}{a(1 + \varepsilon_1)};$$

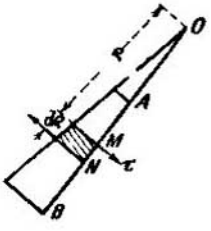
y poniendo sen $(\gamma/2) \approx \gamma/2$; cos $(\gamma/2) \approx 1$, y despreciando las segundas potencias de las cantidades pequeñas, resulta

$$\gamma = 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

43. La solución es análoga a la del problema anterior; resulta, pues,

$$\gamma = \frac{a}{h}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + \frac{b}{a}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3).$$

44. Consideremos un elemento polar del cilindro, de radio ϱ. El par de fuerzas Pp produce tensiones tangenciales τ que se reparten uniformemente en la superficie $2\pi\varrho h$ del cilindro de radio ϱ y altura h. Se tiene, por lo tanto,



$$\tau = \frac{Pp}{2\pi\varrho h \varrho}.$$

El punto N relativamente al M experimenta un deslizamiento $dv = \gamma d\varrho$, siendo $\gamma = \tau/G$ [véase la ec. (13 b)] la variación (distorsión) del ángulo recto en M. El deslizamiento de B será, pues,

$$v = \int_{r_1}^{r_2} \gamma\, d\varrho = \frac{Pp}{2\pi h G}\int_{r_1}^{r_2} \frac{d\varrho}{\varrho^2} = \frac{Pp}{2\pi h G}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

---

45. En primer lugar, las tensiones en las tres caras son

$$BC \ldots \sigma_1 = \frac{670}{1{,}6 \cdot 2{,}8} = 150 \text{ at.},$$

$$CA \ldots \sigma_2 = \frac{-940}{2{,}0 \cdot 2{,}8} = -168 \text{ at.},$$

$$AB \ldots \sigma_3 = \frac{-730}{2{,}0 \cdot 1{,}6} = -228 \text{ at.}$$

Por lo tanto, según la ec. (16), las dilataciones de las aristas son

$$\overline{AM} \ldots \varepsilon_1 = 134 \cdot 10^{-6}$$

$$\overline{BM} \ldots \varepsilon_2 = -72 \cdot 10^{-6}$$

$$\overline{CM} \ldots \varepsilon_3 = -111 \cdot 10^{-6}.$$

46. Poniendo las tensiones principales

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p,$$

y las dilataciones principales [según la ec. (12)]

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = e/3.$$

cada ec. de las (15) da

$$m = \frac{6p}{3p - Ee}.$$

Con los valores dados $p = -20$ at., $e = -10^{-5}$ se tiene

$$m = 3.$$

47. La solución, como en el problema anterior. Resulta

$$k = \frac{mE}{3(m-2)}.$$

48. Como el volumen no se altera, la dilatación cúbica e es nula; por lo tanto, según la ec. (12) y (15),

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

y

$$\sigma_3 = -400 \text{ at.}$$

49. Solución análoga a la del problema anterior. Se tiene $\sigma_1 = A/bc$ y lo mismo para σ_2 y σ_3. De la igualdad $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ se deduce la condición

$$Aa + Bb + Cc = 0.$$

50. De la ec. (14) se halla primeramente $m = 3{,}4$. La dilatación es

$$\varepsilon = \frac{0{,}5}{400} = 0{,}001\,25,$$

y, por lo tanto, la contracción,

$$\varepsilon_2 = \varepsilon/m = 0{,}000\,368,$$

y la variación de anchura,

$$5 \cdot 0{,}000\,368 = 0{,}00184 \text{ mm.}$$

51. De las ec. (15) se deduce en primer lugar $\sigma_1 = \sigma_2$. Ahora bien: la dilatación cúbica es, según la ec. (12),

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_1 (n+2) = \varepsilon_1 \frac{n+2}{n}.$$

Sustituyendo en las ec. (15) se deduce

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{m(m+n)}{(m+1)(m-2)} E \varepsilon_1,$$

$$\sigma_3 = \frac{m(mn - n + 2)}{n(m+1)(m-2)} E \varepsilon_3 = \frac{m(mn - n + 2)}{(m+1)(m-2)} - E \varepsilon_1,$$

de donde

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \frac{m+n}{mn - n + 2}.$$

52. Puesto que las paredes del recinto no ceden, se tendrá $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$, $e = \varepsilon_1$. Sustituyendo estos valores en la ec. (15), tendremos

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\sigma_1}{m-1},$$

53. Sea σ_1 la carga de compresión, en el trozo de hierro, debida a P, y $\sigma_2 = \sigma_3$ las compresiones ejercidas por las abrazaderas; la dilatación de a será, según la ec. (16),

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m} - \frac{\sigma_1}{m}\right] = 0,$$

y como $\sigma_2 = \sigma_1$, se tiene

$$\sigma_2 (m - 1) = \sigma_1.$$

Ahora bien:

$$\sigma_1 = \frac{P}{a^2},\ \sigma_2 = \frac{2(\pi d^2/4)\sigma}{ab},\ m = \frac{10}{3},$$

y, por lo tanto,

$$\sigma = \frac{6Pb}{7\pi a d^2}.$$

54. Como el espesor d de la placa no puede aumentar, la dilatación en la dirección de d será nula. Esta dilatación se calcula por una de las ecuaciones (16), y vale

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left[\frac{-D}{ab} - \frac{1}{m}\left(\frac{P}{ad} - \frac{Q}{bd}\right)\right] = 0,$$

de donde

$$D = \frac{1}{md}(Qa - Pb).$$

55. Sea l_0 la longitud primitiva de la barra, y σ_1 y σ_2 las tensiones debidas a P_1 y P_2; aplicando la ley de Hooke [ec. (13 a)] tendremos

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{F_1} = E\frac{l_1 - l_0}{l_0}, \qquad \sigma_2 = \frac{P_2}{F_2} = E\frac{l_2 - l_0}{l},$$

de donde

$$E = \frac{\frac{P_2}{F_2}l_1 - \frac{P_1}{F_1}l_2}{l_2 - l_1} \quad \text{y} \quad l_0 = \frac{\frac{P_2}{F_2}l_1 - \frac{P_1}{F_1}l_2}{\frac{P_2}{F_2} - \frac{P_1}{F_1}}.$$

56. Siendo r_0 el radio primitivo de la barra, se tiene

$$\frac{r_0 - r_1}{r_0} = \frac{1}{m}\frac{P_1}{\pi r_1^2 E}, \qquad \frac{r_0 - r_2}{r_0} = \frac{1}{m}\frac{P_2}{\pi r_2^2 E},$$

de donde

$$m = \frac{P_2 r_1^2 - P_1 r_2^2}{\pi E r_1^2 r_2^2 (r_1 - r_2)} \quad \text{y} \quad r_0 = \frac{P_2 r_1^3 - P_1 r_2^3}{P_2 r_1^2 - P_1 r_2^2}.$$

---

57. Para $P_{mín} = P_{máx}$ se tiene $n = 1$; $A = K_s = a + b + c$;

para $P_{mín} = 0$, $n = 0$; $A = U = a$;

para $P_{mín} = -P_{máx}$, $n = -1$; $A = V = a - b + c$.

Resolviendo estas ecuaciones resultan para a, b, c los valores siguientes:

$$a = U, \quad b = (K_s - V)/2, \quad c = (K_s + V)/2 - U.$$

58. Con ayuda de los valores del cuadro 17, y según el problema anterior, tendremos

hierro dulce, $A = 2160 + 1230\,n + 250\,n^2$;

acero dulce, $A = 2400 + 1440\,n + 360\,n^2$;

acero semiduro, $A = 2900 + 2500\,n + 890\,n^2$.

59. Se tiene $n = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$; con ayuda del problema 58 la carga de fatiga para el hierro dulce es, según v. Tetmajer, $A = 2416$ at., y, por lo tanto, el coeficiente de trabajo admisible será $k_z' = 690$ at.

60. Se tiene $n = \frac{8}{-20} = -\frac{2}{5}$; partiendo de la carga de fatiga del acero dulce dada en el problema 58, resulta $A = 1882$ at. $k_z' = 538$ at.

61. Para la primera barra hay que tener en cuenta la carga gradual U; para la segunda, la oscilatoria V. Si la seguridad ha de ser la misma en ambas, deberá verificarse la proporción

$$U : V = P : P/m,$$

de donde

$$m = \frac{U}{V}.$$

62. Si se dividen los límites superiores de las fuerzas por 6 cm.², se hallan las cargas de trabajo, que son 2975 at., 1600 at. y 1475 at., respectivamente. Tomando como base la ecuación de v. Tetmajer (ejercicio 58) y poniendo, respectivamente, $n = 1/2$, $-1/3$, $-1/2$, tendremos para las tres barras las siguientes ecuaciones:

$$2975 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}, \quad 1600 = a - \frac{b}{3} + \frac{c}{9}, \quad 1475 = a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4}.$$

De donde resulta $a = 2000$ at., $b = 1500$ at., $c = 900$ at., y según el problema 57, $K_z = a + b + c = 4400$ at.

---

63. Los alargamientos de ambas varillas deben ser iguales; por lo tanto, según la ec. (19),

$$\frac{A + G_1/2}{E\,F_1} = \frac{B + G_2/2}{E\,F_2}.$$

Las reacciones de los apoyos son

$$A = Pb/l, \quad B = Pa/l,$$

y los pesos de ambas barras,

$$G_1 = \gamma\,F_1\,l, \qquad G_2 = \gamma\,F_2\,l,$$

siendo F_1, F_2 sus secciones.

De aquí se deduce

$$A/F_1 = B/F_2,$$

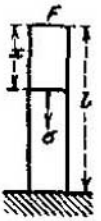
o bien

$$a : b = d_2^2 : d_1^2.$$

64. El acercamiento vale $\frac{Pa}{EF}(2+\sqrt{2})$. [La tensión en cada varilla del perímetro es $P/\sqrt{2}$, y su dilatación valdrá $\varepsilon_1 = -\frac{P}{EF\sqrt{2}}$; la tensión en la diagonal es P, y su dilatación, $\varepsilon_2 = +\frac{P}{EF}$; las primeras tomarán, pues, la longitud $a(1+\varepsilon_1)$, y la diagonal, la longitud $a\sqrt{2}(1+\varepsilon^2)$. Se desprecian las segundas potencias de las dilataciones.]

65. A la distancia x de la sección de arriba, la tensión vale

$$\sigma = -\frac{Gx}{Fl},$$



y la dilatación,
$$\varepsilon = \frac{\Delta\, dx}{dx} = -\frac{Gx}{EFl},$$

de donde
$$\Delta\, dx = -\frac{Gx}{EFl}\,dx.$$

Suponiendo en x una rebanada de espesor dx, después del acortamiento debido al peso propio, este espesor será

$$dx - \Delta\, dx = \left(1 - \frac{Gx}{lEF}\right)dx,$$

y su distancia al suelo valdrá

$$\xi = \int_x^l \left(1 - \frac{Gx}{EFl}\right)dx = (l-x) - \frac{G}{2EFl}(l^2 - x^2).$$

Llamando ξ_s a la distancia al suelo del c. d. g. después del acortamiento, tendremos por la definición de ξ_s:

$$G\xi_s = \int_0^l \xi\, dG\,.$$

Poniendo, pues, $dG = \frac{G}{l}\,dx$, se deduce

$$\xi_s = \frac{l}{2} - \frac{Gl}{3EF},$$

y el descenso buscado del c. d. g. es

$$\frac{l}{2} - \xi_s = \frac{Gl}{3EF}.$$

66. De $h(2R-h) = (d/2)^2$ se deduce, despreciando h respecto a $2R$,

$$Rh = d^2/8,$$

y de $P = p\pi d^2/4 = Ch$ resulta $Rp = C/2\pi =$ constante.

67. Llamando z a la distancia de la sección $x^2\pi$ a la sección extrema de arriba, tendremos

$$x = r + \frac{R-r}{h} z, \qquad dz = \frac{h}{R-r} dx,$$

y el peso G_x que carga sobre la superficie πx^2 es

$$G_x = \pi\gamma \int_0^z x^2 dz = \frac{\pi\gamma h}{R-r} \int_r^x x^2 dx = a(x^3 - r^3),$$

siendo
$$a = \frac{\pi\gamma h}{3(R-r)}.$$

La compresión en la superficie πx^2 es

$$\sigma = \frac{P + G_x}{\pi x^2} = \frac{P + a(x^3 - r^3)}{\pi x^2},$$

de donde
$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{\pi}\left[a - 2\frac{P - ar^3}{x^3}\right],$$

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = \frac{6(P - ar^3)}{\pi} x^2.$$

Poniendo $\frac{d\sigma}{dx} = 0$, resulta

$$x = \sqrt[3]{2\left(\frac{P}{a} - r^3\right)} = \sqrt[3]{\frac{6P(R-r)}{\pi\gamma h} - 2r^3};$$

para que x sea positivo, debe ser $P > ar^3$, y entonces $\frac{d^2\sigma}{dx^2} > 0$, y se cumple la condición del mínimo. Para que exista una sección con esa propiedad debe verificarse $r \leq x \leq R$, o sea

$$\frac{3}{2} G \frac{r^3}{R^3 - r^3} \leq P \leq \frac{1}{2} G \frac{R^3 + 2r^3}{R^3 - r^3},$$

siendo
$$G = a(R^3 - r^3)$$

el peso del tronco total.

68. $P : G = 43 : 112$.

69. Sea h_1 la altura del cono suplementario; la sección horizontal F a la distancia x de F_0 es

$$F = F_0\left(\frac{h_1 + x}{h_1}\right)^2.$$

La tensión en F es

$$\sigma_x = P/F,$$

y la dilatación, $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\Delta dx}{dx}$, de donde

$$\Delta dx = d\Delta x = \frac{Ph_1^2}{EF_0} \frac{dx}{(h_1 + x)^2}.$$

La integración da

$$\Delta x = C - \frac{P h_1^2}{E F_0} \frac{1}{h_1 + x},$$

y teniendo en cuenta que para $x = 0$, también $\Delta x = 0$, se tiene

$$\Delta x = \frac{P h_1}{E F_0} \frac{x}{h_1 + x}.$$

La variación de altura buscada resulta para $x = h$:

$$\Delta h \equiv [\Delta x]_{x=h} = \frac{P h}{E \sqrt{F_0 F_1}}.$$

70. Sea A la fuerza de reacción que actúa en el gancho; la tensión en x (véase la figura de la solución 65) vale

$$\sigma = \frac{A}{F} - \frac{G x}{F l},$$

de donde la dilatación

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{1}{E F} \left[A - G \frac{x}{l} \right]$$

y la variación de longitud

$$\Delta x = \frac{1}{E F} \left[A x - G \frac{x^2}{2 l} \right].$$

Poniendo ahora $$\Delta l = \frac{1}{E F} \left[A l - \frac{1}{2} G l \right] = 0,$$

resulta

$$A = G/2.$$

El mismo valor tiene la presión sobre el plano.

71. Considerando un pequeño trozo de anillo correspondiente al ángulo central $d\varphi$, su longitud será $R d\varphi$; el esfuerzo cortante que sobre él actúa en dirección radial vale $H R d\varphi$ y debe equilibrar a las dos tracciones que actúan en los extremos del trozo; por lo tanto,

$$H R d\varphi = 2 S \operatorname{sen} \frac{d\varphi}{2} \approx S d\varphi,$$

de donde

$$S = H R.$$

Éste es el esfuerzo axial en un anillo producido por una presión interior constante H (kg./m.).

72. Sean S los esfuerzos que se producen en las varillas, y F su sección; la longitud de $\overline{AC}$ después de la deformación vale

$$l + \Delta l = l + \frac{S l}{E F} \quad \text{o bien} \quad \Delta l = \frac{S l}{E F}.$$

Para el descenso de la articulación C, despreciando cantidades de orden superior, se tiene

$$f = \sqrt{(l + \Delta l)^2 - l^2} \approx \sqrt{2 l \Delta l} = l \sqrt{\frac{2 S}{E F}}.$$

Del equilibrio entre P y las dos fuerzas S se deduce

$$P = 2S \frac{f}{\sqrt{l^2 + f^2}},$$

y eliminando S,

$$P = E F \left(\frac{f}{l}\right)^3, \quad \text{o bien} \quad f = l \sqrt[3]{\frac{P}{E F}}.$$

La fuerza P es, pues, en este caso, proporcional a la tercera potencia de la flecha.

78. Sea $x^2 = 2py$ la ecuación de la línea funicular respecto a un sistema de ejes que pasa por C; tendremos que $y = h_0$ para $x = l$; por lo tanto, $p = l^2/2h_0$, y la longitud entre A y C será

$$L = \int_0^l ds = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^l \left[1 + \frac{4h_0^2 x^2}{l^4}\right]^{1/2} dx,$$

y aproximadamente

$$L \approx l + \frac{2}{3}\frac{h_0^2}{l}. \tag{a}$$

El esfuerzo de tracción en el punto C del cable vale $H = qp$, y a la distancia horizontal x de C valdrá

$$S = \sqrt{H^2 + q^2 x^2} = q\sqrt{p^2 + x^2} = qp\sqrt{1 + (x/p)^2}.$$

La dilatación en ese punto es

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{S}{E F},$$

siendo F la sección del cable; el alargamiento del elemento de arco ds es

$$\Delta ds = \frac{S}{E F} ds = \frac{qp\sqrt{1 + (x/p)^2}}{E F}\sqrt{1 + (x/p)^2}\, dx,$$

o sea

$$\Delta s = \frac{qp}{E F}\int_0^l \left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) dx = \frac{ql\,(3p^2 + l^2)}{3pEF}.$$

Después de la dilatación, la longitud entre A y C es

$$L_1 = l + \Delta s = l + \frac{ql}{6h_0 E F}(3l^2 + 4^2 h_0^2). \tag{b}$$

Sea h la flecha después de la deformación, y poniendo según la ec. (a)

$$L_1 = l + \frac{2}{3}\frac{h^2}{l},$$

se obtiene, igualando,

$$4h^2 h_0 E F = ql^2(3l^2 + 4h_0^2).$$

En el paréntesis de la derecha podemos suprimir $4h_0^3$, que es despreciable respecto a $3l^3$, y en el primer miembro hacer $h_0 = h$, obteniéndose así

$$h = \sqrt[3]{\frac{3ql^4}{4EF}}.$$

74. Considerando un elemento de barra entre las secciones F y $F + dF$, su peso es $\gamma F dx$: llamando G_x al peso de la barra desde F hacia abajo, tendremos

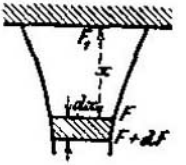
$$G_x = F\sigma \text{ para la sección } F,$$

$$G_x - \gamma F dx = (F + dF)\sigma \text{ para la sección } F + dF,$$

de donde $$\sigma dF = -\gamma F dx, \quad \frac{dF}{F} = -\frac{\gamma}{\sigma} dx,$$

e integrando,

$$\ln F = C - \frac{\gamma}{\sigma} x \text{ ; para } x = 0 \text{ se tiene } C = \ln F_1,$$



de donde

$$F = F_1 e^{-\gamma x/\sigma}$$

será la ley de la forma del sólido.

Para $x = \infty$ se tiene $F_0 = 0$.

El peso del sólido es

$$G = \gamma \int_0^\infty F dx = F_1 \sigma.$$

---

75. La dilatación de la barra es $\varepsilon = \frac{1}{4000}$; por lo tanto, la fuerza necesaria para impedirla será

$$F\sigma = FE\varepsilon = 1 \cdot 2 \cdot 10^6 \frac{1}{4000} = 500 \text{ kg}.$$

76. Siendo α el coeficiente de dilatación (para 1° C.), la variación de longitud de la barra será $l\alpha(t_1 - t_0)$, y, por tanto, la dilatación,

$$\alpha(t_1 - t_0) = 125 \cdot 10^{-7}(-10° - 20°) \approx -1/2700.$$

Esta dilatación puede impedirse con una tensión $E\alpha(t_0 - t_1)$, o sea con un peso $G = EF\alpha(t_0 - t_1) = 5926$ kg., siendo $E = 2 \cdot 10^6$ at. y $F = 8$ cm.²

77. Como $\alpha_2 > \alpha_1$, una elevación de temperatura produce compresiones en el manguito de cobre y tracciones en el tornillo de acero. Las fuerzas que actúan se deducen de la condición geométrica de la igualdad de dilataciones; tendremos, pues,

$$\alpha_1(t - t_0) + \frac{X}{E_1 F_1} = \alpha_2(t - t_0) - \frac{X}{E_2 F_2},$$

de donde

$$X = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(t - t_0)}{1/E_1 F_1 + 1/E_2 F_2}.$$

y con los datos numéricos resultará

$$X = \frac{40 \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 10^{6}}{1/2{,}2 \cdot 6 + 1/1{,}1 \cdot 18} = 6340 \text{ kg.}$$

Las tensiones en el tornillo y la tuerca serán

$$\sigma_1 = X/F_1 = 1057 \text{ at.}, \quad \sigma_2 = X/F_2 = 352 \text{ at.}$$

78. Debe tenerse en cuenta que a un aumento de temperatura corresponde un alargamiento del cable y, por lo tanto, una disminución de tensión, pero con esta disminución a su vez se acorta el cable y es más pequeño el alargamiento.

Si al aumentar la temperatura $t°$ C. la tensión baja de σ_0 a σ_1, la dilatación producida por esta causa será $-(\sigma_0 - \sigma_1)/E$. Ahora bien: si la tensión no variase, la mitad de la longitud L se convertiría en $L(1 + \alpha t)$; pero como la tensión disminuye, ese aumento de longitud se reduce y queda en definitiva L convertido en

$$L_1 = L(1 + \alpha t)\left(1 - \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{E}\right)$$

$$= l\left(1 + \frac{2}{3}\frac{h_0^2}{l^2}\right)(1 + \alpha t)\left(1 - \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{E}\right)$$

$$\approx l\left(1 + \frac{2}{3}\frac{h_0^2}{l^2} + \alpha t - \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{E}\right).$$

Haciendo $q = \gamma F$, $H_0 = \sigma_0 F$ (tracción total horizontal !), la flecha a $t_0°$ C. es

$$h_0 = \frac{q l^2}{2 H_0} = \frac{\gamma l^2}{2\sigma_0},$$

y del mismo modo para $t_1°$ C.

$$h_1 = \frac{\gamma l^2}{2\sigma_1}, \qquad \text{de donde} \quad \sigma_1 = \frac{\gamma l^2}{2 h_1}.$$

Además,

$$L_1 = l\left(1 + \frac{2h_1^2}{3l^2}\right) = l\left[1 + \frac{\gamma^2 l^2}{6\sigma^2} + \alpha t - \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\gamma l^2}{2 E h_1}\right],$$

de donde resulta inmediatamente el valor de h_1.

79. De $P = \frac{\pi d^2}{4} k'_s$ se deduce $d = 3$ cm.

80. La sección de la barra tiene un área $F = 6{,}928$ cm.²; la carga de rotura valdrá, pues,

$$P = F k_s = 27712 \text{ kg.}$$

81. $A = b x k'_d$, de donde $x = 54$ cm.

82. Se tiene P + peso propio $= F k'_z$; para calcular la sección se tiene

$$F = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{P}{k'_z - l\gamma} = 1{,}18 \text{ cm.}^2,$$

de donde

$$d = 1{,}23 \text{ cm.}$$

(Como se calcula en kg. y cm., hay que poner $l = 3000$ cm. y $\gamma = 0{,}0077$ kg./cm.³).

83. $Q = 36\frac{\pi}{4}\delta^2 k'_t = 678$ kg., $\qquad P = 36\frac{\pi}{4}\delta^2 K_t = 6330$ kg.

84. Sea F la sección de la barra, l la longitud de rotura; el peso vale

$$Fl\gamma = FK_t,$$

de donde

$$l = K_t/\gamma;$$

para la madera ($\gamma = 0{,}0005$ kg./cm.³): $\quad l = 15{,}8$ km.

para el hierro ($\gamma = 0{,}0078$ kg./cm.³): $\quad l = 4{,}87$ km.

85. El diametro interior d_1 de la columna se deduce de la ecuación

$$d_1^2 = d^2 - \frac{40\,P}{\pi K_d},$$

de donde resulta que el espesor de la columna $(d - d_1)/2 = 12$ mm.

86. Cuando la arista a es vertical, la carga total es $P_1 + abc\gamma$ y ha de ser igual al área bc multiplicada por la carga de trabajo $\mathfrak{S}\,K_d$, siendo $\mathfrak{S}$ el coeficiente de seguridad. De aquí resulta

$$P_1 = bc\,(\mathfrak{S}\,K_d - a\gamma).$$

Escribiendo las ecuaciones correspondientes a P_2 y P_3, se tiene, finalmente,

$$P_1 : P_2 : P_3 = \left(\frac{1}{a} - k\right) : \left(\frac{1}{b} - k\right) : \left(\frac{1}{c} - k\right),$$

en donde $k = \gamma/\mathfrak{S}\,K_d$.

87. Sea F la sección de la base del muro; se tendrá

$$Fl\gamma = \frac{1}{20}K_d F,$$

de donde

$$l = \frac{K_d}{20\gamma} = 31{,}25 \text{ m.}$$

88. De $q + bh\gamma = bk'_d$ se deduce

$k'_d = 30\,000$ kg./m.², $\gamma = 1600$ kg./m.³ la carga: $q = 10\,080$ kg./m.

De

$$q + bh\gamma + xh_1\gamma = xk'_d \text{ se deduce } x = 0{,}45 \text{ m.}$$

y de

$$q + bh\gamma + xh_1\gamma + yh_2\gamma = yk'_d \text{ resulta } y = 0{,}47 \text{ m.}$$

89. La potencia que ha de transmitirse en mkg./seg. es

$$Pv = P\frac{Rn\pi}{30} = 75\,N,$$

siendo P la fuerza y v la velocidad, ambas en la llanta. P es la diferencia de las tensiones totales de los dos ramales de la correa, el tirante y el flojo, y como suponemos que la tensión total en el ramal tirante es $2P$, esta cantidad es la que nos servirá para el cálculo. Tendremos, pues

$$2P = b\delta k'_d;$$

por lo tanto, expresando todas las longitudes en centímetros,

$$b = 71\,620 \frac{2N}{\pi R \delta k_t'} = 29{,}8 \text{ cm.}$$

90. Siendo R el rozamiento entre cinta y llanta, se tiene

$$R = S \frac{e^{fa} - 1}{e^{fa}}.$$

Para que se sostenga la carga Q debe verificarse

$$R r_1 = Q r.$$

Poniendo, además, $S = b \delta k_s'$, resulta

$$b = \frac{Q}{\delta k_s'} \frac{r}{r_1} \frac{e^{fa}}{e^{fa} - 1} = 9 \text{ cm.},$$

en donde $e^{fa} = e^{0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 2\pi} = 1{,}97$.

91. Entre la fuerza P aplicada al manubrio y la fuerza Q que se produce en el husillo existe la relación

$$P = \frac{r}{r_1} Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho),$$

en donde $f = \operatorname{tg} \varrho = 0{,}1$ y $\varrho = 5° 40'$ es el ángulo de rozamiento. Poniendo

$$Q = r^2 \pi K_s, \quad \text{se tiene} \quad P = 40{,}6 \text{ kg.}$$

92 Utilizando la ecuación que da el trabajo de fatiga del acero dulce (problema 58), se tiene

$$A = 2400 + 1440\, n + 360\, n^2,$$

siendo

$$n = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}, \quad A = 2473 \text{ at.}$$

y $k_s' = 2A/7 = 705$ at.; se deduce, pues, de

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{40\,000}{705} \approx 58 \text{ cm.}^2, \quad d \approx 8{,}6 \text{ cm.}$$

93. Se tiene

$$n = 5/14, \qquad k_t' = 866 \text{ at.},$$

y de

$$14\,000 = b d k_t' \quad \text{resulta} \quad b = 16{,}2 \text{ cm.}$$

94. $\qquad n = -2/6, \qquad k_s' = 567$ at., $\qquad b = 10{,}6$ cm.

95. Se calcula tomando como base la carga de rotura inicial (en caso de carga y descarga sucesivas) que para el hierro dulce, según la ecuación (17), es

$$U = 2400 \text{ at.}$$

Como coeficiente de trabajo se elige según la ec. (18) (con $A = U$)

$$k_s' = 2\, U/7 = 687 \text{ at.}$$

La fuerza que tiende a separar la cubierta es

$$P = \frac{\pi d^2}{4} (p - p_0),$$

en donde $p_0 = 1$ at. es la presión exterior. Haciendo, además,

$$P = n \frac{\pi \delta^2}{4} k'_z ,$$

resulta

$$\delta = d \sqrt{\frac{p - p_0}{n k'_z}} \approx 26 \text{ mm.}$$

96. Sea x el diámetro de la barra ; se tiene primeramente

$$\frac{\pi}{4} x^2 = \frac{P}{k'_z - \gamma l} = 13{,}51 \text{ cm.}^2$$

Además, $\gamma = 0{,}0078$ kg./cm.^{3}, y, por lo tanto, el peso de la barra,

$$G = \gamma x^2 \pi l/4 = 2108 \text{ kg.},$$

y su alargamiento, según la ec. (19),

$$\Delta l = \frac{(P + G/2)\, l}{E x^2 \pi/4} = 5{,}22 \text{ cm.},$$

97. Calculando el trozo inferior como en el problema anterior, se tiene

$$\frac{x_1^2 \pi}{4} = \frac{P}{k'_z - \gamma l/4} = 10{,}69 \text{ cm.}^2 \qquad x_1 \approx 3{,}70 \text{ cm.},$$

y el peso de este trozo es

$$G_1 = \gamma \frac{x_1^2 \pi}{4} \frac{l}{4} = 417 \text{ kg.}$$

Para el segundo trozo,

$$\frac{x_2^2 \pi}{4} = \frac{P + G_1}{k'_z - \gamma l/4} = 11{,}44 \text{ cm.}^2, \qquad x_2 \approx 3{,}80 \text{ cm.},$$

y su peso es

$$G_2 = \gamma \frac{x_2^2 \pi}{4} \frac{l}{4} = 448 \text{ kg.}$$

Del mismo modo para los otros dos restantes resulta

$$\frac{\pi x_3^2}{4} = \frac{P + G_1 + G_2}{k'_z - \gamma l/4} = 12{,}24 \text{ cm.}^2, \quad x_3 \approx 4{,}00 \text{ cm.}, \quad G_3 = 478 \text{ kg.};$$

$$\frac{\pi x_4^2}{4} = \frac{P + G_1 + G_2 + G_3}{k'_z - \gamma l/4} = 13{,}09 \text{ cm.}^2, \quad x_4 \approx 4{,}10 \text{ cm.}, \quad G_4 = 511 \text{ kg.}$$

El ahorro de material respecto a la barra del problema anterior es, pues,

$$2108 - (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) = 254 \text{ kg.}$$

El alargamiento del trozo inferior es, según la ec. (19),

$$\frac{(P + G_1/2)\, l/4}{E x_1^2 \pi/4} = 1{,}45 \text{ cm.};$$

el del segundo trozo,

$$\frac{(P + G_1 + G_2/2)\, l/4}{E x_2^2 \pi/4} = 1{,}45 \text{ cm.}$$

Los mismos valores 1,45 cm. se obtienen para los otros dos trozos.
El alargamiento total de la barra valdrá, pues, 5,80 cm.

---

98. $J = \frac{1}{3}\,[2 \cdot 3 \cdot 18^3 + 6 \cdot 4^3] = 11\,792 \text{ cm.}^4$

Distancia del c. d. g. al eje J:

$$e = 7{,}73 \text{ cm.}$$

Área de la sección:

$$F = 132 \text{ cm.}^2$$

Por lo tanto,

$$J_1 = J - Fe^2 = 3905 \text{ cm.}^4;$$

$$J_2 = \tfrac{1}{2}\,[18 \cdot 12^3 - 14 \cdot 6^3] = 2340 \text{ cm.}^4$$

99. $J = \frac{1}{3}\,[10 \cdot 60^3 + 110 \cdot 10^3] = 756\,667 \text{ mm.}^4 \approx 75{,}7 \text{ cm.}^4$

Distancia del c. d. g. al eje J:

$$e = 1{,}38 \text{ cm.}$$

Area de la sección:

$$F = 17 \text{ cm.}^2$$

Por lo tanto,

$$J_1 = J - Fe^2 = 43{,}3 \text{ cm.}^4$$

y $$J_2 = \tfrac{1}{2}\,[10 \cdot 120^3 + 50 \cdot 10^3] = 1444\,167 \text{ mm.}^4 \approx 144{,}4 \text{ cm.}^4$$

100. Considerando primeramente el triángulo ABM, su momento de inercia respecto a la recta MB, según la ec. (24) será

$$\tfrac{1}{2}\,\overline{MB}\,(\overline{AM} \text{ sen } \alpha)^2.$$

Llamando $h = \overline{MB} \cdot \text{sen } \alpha$ a la altura del triángulo dado ABC respecto a la base $AC = b$, la expresión anterior toma la forma

$$\frac{1}{12}\,\frac{h}{\text{sen } \alpha}\left(\frac{b}{2} \text{ sen } \alpha\right)^3.$$

Para el otro triángulo CBM se obtiene el mismo valor; la suma da, pues, el buscado

$$J = \frac{1}{48}\,h\,b^3 \text{ sen}^2\,\alpha.$$

101. Prolongando el lado $\overline{BC}$ hasta su encuentro en D con Ax, la superficie del triángulo ABC es

$$F = \Delta\,DAB - \Delta\,DAC = \frac{1}{2}\,\overline{AD} \cdot (b - c),$$

y su momento de inercia respecto al eje Ax,

$$J = \frac{1}{12}\,\overline{AD} \cdot (b^3 - c^3),$$

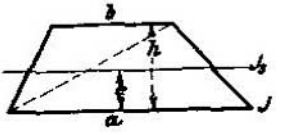
y, por lo tanto,

$$J = \frac{F}{6}\,(b^2 + bc + c^2).$$

102. Se divide el trapecio por medio de una diagonal en dos triángulos y, utilizando las ec. (24) y (25) para expresar el momento de inercia de los mismos, se tiene

$$J = \frac{1}{12} a h^3 + \frac{1}{4} b h^3 = \frac{h^3}{12} (a + 3b).$$

La ordenada del c. d. g. de un trapecio es

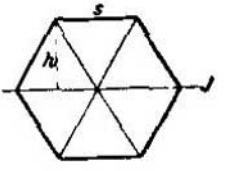


$$e = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}.$$

Aplicando la ec. (20), resulta

$$J_x = J - F e^2 = \frac{h^3}{36} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b}.$$

103. Se descompone el hexágono en seis triángulos equiláteros a los que se aplica las fórmulas (24) y (25), y de esta manera se tiene



$$J = 4 \frac{1}{12} s h^3 + 2 \frac{1}{4} s h^3 = \frac{5\sqrt{3}}{16} s^4.$$

104. Se calcula x por medio de la ecuación

$$3x^2 (BH - bh) + 6x [B^2 H - 2 Bbh + b^2 h]$$
$$= BH^3 - bh^3 - 4 B^2 (H - h) - 4h (B - b)^2.$$

105. Utilizando para el cálculo del momento de inercia la fórmula hallada para el trapecio en el problema 102, se tiene

$$J = \frac{a^4}{12} \frac{4n - 3}{n^4},$$

y el momento resistente

$$W = \frac{J}{h/2n} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \frac{4n - 3}{n^3}.$$

Poniendo

$$\frac{dW}{dn} = 0, \quad \text{resulta} \quad n = \frac{9}{8},$$

y

$$\frac{d^2 W}{dn^2} = \sqrt{2}\, a^3 \frac{2n - 3}{n^5} < 0.$$

El momento resistente máximo es, pues,

$$W_{máx} = 0{,}124\, a^3.$$

106. Utilizando la ec. (21) hay que sustituir

$$e = r - \frac{4r}{3\pi}, \qquad e' = \frac{4r}{3\pi}.$$

y se obtiene

$$J = r^4 \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{4}{3}\right) = 0{,}63\, r^4.$$

Del mismo modo, si se sustituye

$$e = m + \frac{4r}{3\pi}, \qquad e' = \frac{4r}{3\pi}$$

resulta

$$J_1 = r^4 \left[\frac{\pi}{8} + \frac{4m}{3r} + \frac{\pi m^2}{2r^2}\right].$$

107. El momento de inercia del anillo circular es $\frac{\pi}{4}(6^4 - 5^4)$; los suplementos de arriba y abajo se pueden considerar como rectángulos y dan entre los dos $\frac{1}{12}(1\cdot 14^3 - 1\cdot 12^3)$; los dos laterales, $\frac{1}{12}\cdot 2\cdot 1^3$, o sea en total 611,8 cm.^{4}, y dividiendo por 7 cm. resulta el momento resistente igual a 87,4 cm.^{3}

108. El momento de inercia del cuadrante respecto al radio horizontal es $\pi r^4/16$, y como la distancia de ambas paralelas es $4r/3\pi$, aplicando la fórmula (20) tendremos:

$$J_s = \frac{\pi}{16} r^4 - \frac{1}{4} r^2 \pi \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 = r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) = 0{,}05487\, r^4.$$

109. Se tiene $J = \frac{\pi}{8} 5^4 + \frac{1}{3} 10\cdot 20^3 = 26912$ cm.^{4}

Area: $F = 239{,}27$ cm.^{2},

distancia del c. d. g.: $e = 8{,}01$ cm.

y $J_s = J - Fe^2 = 11560$ cm.^{4}

110.

$$J_x = \frac{l^3}{3} + r\int_0^{\pi/2} (l + r \operatorname{sen} \varphi)^2\, d\varphi = \frac{l^3}{3} + \frac{\pi r l^2}{2} + 2\, l r^2 + \frac{\pi r^3}{4},$$

$$J_y = l r^2 + r\int_0^{\pi/2} (r \cos \varphi)^2\, d\varphi = l r^2 + \frac{\pi r^3}{4}.$$

111. El m. de i. para el borde inferior del semicírculo es

$$J = r^4 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{8}{3}\right) = 3{,}0594\, r^4,$$

Area: $F = r^2 \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) = 3{,}571\, r^2, \qquad Fe = 2r^3 - \frac{r^2\pi}{2}\,\frac{4r}{3\pi} = \frac{4}{3} r^3,$

distancia del c. d. g.: $e = 0{,}373\, r,$

$$J_1 = J - Fe^2 = 2{,}5626\, r^4,$$

$$J_2 = r^4 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{6}\right) = 0{,}5594\, r^4.$$

112. $J = \frac{\pi}{8}(10^4 - 8^4) + 2\frac{1}{3}[6\cdot 20^3 - 4\cdot 18^3] = 18\,766$ cm.^{4}

Area de la sección: $F = 152{,}556$ cm.^{2},

distancia del c. d. g.: $e = 5{,}105$ cm.

De aquí se deduce $J_1 = J - Fe^2 = 14\,788$ cm.^{4},

y $J_2 = \frac{\pi}{8}(10^4 - 8^4) + \frac{1}{12}[2\cdot 28^3 + 18\cdot 20^3 - 20\cdot 16^3] = 11\,150$ cm.^{4}

113. Aplicando la fórmula (21) para los cuadrantes de radios R y r, tendremos

$$J = \frac{\pi}{16}(R^4 - r^4) + \frac{2}{3}a(R^3 - r^3) + \frac{\pi}{4}a^2(R^2 - r^2).$$

114. Se utiliza la fórmula (21). Sea J' el momento de inercia para el diámetro horizontal del cuadrante. La distancia e' al centro de gravedad es

$$e' = \frac{2}{\pi}\left(r + \frac{d^2}{12r}\right); \text{ además, } e = r - e',$$

y, por lo tanto, $$J' = \frac{\pi}{16}\left[\left(r + \frac{d}{2}\right)^4 - \left(r - \frac{d}{2}\right)^4\right]$$

y $$J = \frac{rd}{4}\left[r^2(3\pi - 8) + d^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)\right].$$

115. Se aplica la fórmula (21) de un modo análogo al del ejemplo anterior.

$$J_1 = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) + \frac{8}{3}a(R^3 - r^3) + \pi a^2(R^2 - r^2) + \frac{4}{3}a^3(R - r),$$

$$J_2 = \frac{3\pi}{4}(R^4 - r^4) - \frac{4}{3}(R + r - a)(R^3 - r^3) + \pi Rr(R^2 - r^2).$$

116. $$J_1 = \frac{\pi}{8}(R^4 - r^4),$$

distancia del c. d. g. al centro:

$$e = \frac{4}{3\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2},$$

por lo tanto,

$$J_2 = J_1 - Fe^2 = J_1 - \frac{8}{9\pi}\frac{(R^3 - r^3)^2}{R^2 - r^2}.$$

117. Se divide la superficie en bandas paralelas al eje J. Siendo $2y$ la longitud de una de ellas, dx su anchura, y x su distancia a O, tendremos

$$J = 2\int_{r\cos\alpha}^{r}(x - r\cos\alpha)^2 y\,dx = 2\int_{r\cos\alpha}^{r}(x - r\cos\alpha)^2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Efectuando la integración, resulta

$$J = r^4\left\{\alpha\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{4}\right) - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^2\alpha\right)\right\}.$$

118. Se divide la superficie en bandas paralelas a Ox; y siendo para una cualesquiera de ellas $2x$ la longitud, dy la anchura e y la distancia a Ox, se tiene

$$J_x = \int y^2\, 2x\, dy.$$

La ecuación de la parábola es $x^2 = \frac{b^2}{a} y$; por lo tanto, $dy = \frac{a}{b^2}\, 2x\, dx$ y

$$J_x = \int_0^b \frac{a^2}{b^4} x^4\, 2x \frac{a}{b^2}\, 2x\, dx = \frac{4}{7} a^3 b.$$

Utilizando las mismas bandas para el cálculo de J_y y considerándolas como rectángulos, tendremos

$$J_y = \int_0^a \frac{1}{12}\, dy\, (2x)^3 = \frac{2}{3} \int_0^b \frac{a}{b^2}\, 2x^4\, dx = \frac{4}{15}\, a b^3.$$

119. $$J = \frac{\pi}{4} a^3 b \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 \right] = 55\ 616 \text{ cm.}^4$$

[Véase la fórmula (27).]

120. El momento resistente del rectángulo dado es $bh^2/6$, y el de los dos rectángulos juntos será

$$\frac{bh^3/12 + 2xy^3/3}{y},$$

siendo xy las coordenadas del punto P. Igualando ambos valores resulta la ecuación de la curva buscada

$$y\,(bh^2 - 4xy^2) = \frac{1}{2}\, bh^3.$$

Esta curva pasa por A y tiene como asíntota el eje Oy.

Haciendo $\frac{dx}{dy} = 0$, se deduce para la máxima anchura del rectángulo añadido $x_{máx} = \frac{4}{27} b$, y su altura correspondiente es $y = \frac{3}{4} h$.

121. El momento resistente del rectángulo b, h es $bh^2/6$; el de la sección total, J/η, siendo J el momento de inercia total para la horizontal que pasa por el centro de gravedad y η la distancia de esta horizontal al borde x. Haciendo

$$\frac{J}{\eta} = \frac{1}{6}\, bh^2,$$

resulta para x la ecuación

$$x^3 + bnx\,(4 + 5n + 4n^2) = 2b^2 n^3,$$

en la que $n = h/h_1$.

122. Sean x, y las coordenadas del punto P de la curva. El momento resistente constante es

$$\frac{J}{y} = \frac{1}{6} b h^2;$$

por lo tanto,

$$dJ = \frac{1}{6} b h^2 \, dy.$$

El incremento dJ del momento de inercia J vale

$$dJ = 2y^2 \, df = 2y^2 \, 2x dy,$$

siendo df una banda estrecha paralela al eje Ox; se deduce fácilmente

$$xy^2 = bh^2/24$$

como ecuación de la línea buscada.

Para $y = h/2$ se tiene $x = b/6$, es decir que la curva arranca en los puntos que dividen a los lados b en tres partes iguales.

---

123. Sean J_1, J_2 los m. de i. principales para el origen; J y J' los momentos de inercia dados; según la fórmula (29)

$$J = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

$$J' = J_1 \cos^2 (90° + \alpha) + J_2 \operatorname{sen}^2 (90° + \alpha).$$

Haciendo $J = J'$, se deduce $J_1 = J_2$.

124. La elipse y el rectángulo deben tener los mismos ejes de simetría. Siendo x, y los semiejes de la elipse y b, h los lados respectivos del rectángulo, tendremos para dichos ejes, según las fórmulas (23) y (27),

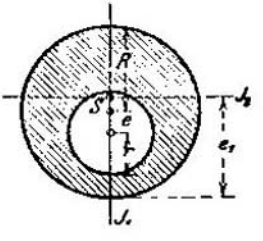
$$\frac{1}{12} b h^3 = \frac{\pi}{4} x y^3 \quad \text{y} \quad \frac{1}{12} b^3 h = \frac{\pi}{4} x^3 y,$$

de donde se deduce

$$x = b/\sqrt[4]{3\pi}, \qquad y = h/\sqrt[4]{3\pi}.$$

Como la elipse y el rectángulo tienen los mismos m. de i. principales, también serán iguales todos los m. de i. respecto a todos los ejes que pasan por el centro.

125. $$J_1 = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = 117\,810 \text{ cm.}^4,$$



$$J_2 = J_1 + \pi R^2 (e_1 - R)^2 - \pi r^2 (e_1 - R + e)^2,$$

$$e_1 = \frac{R^3 - r^2 (R - e)}{R^2 - r^2} = 21{,}67 \text{ cm.},$$

$$J_2 = 107\,338 \text{ cm.}^4$$

126. Los m. de i. principales para un vértice del triángulo equilátero son

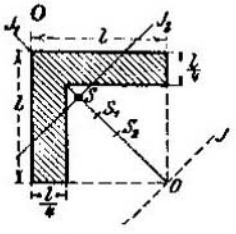
$$J_1 = \frac{3\sqrt{3}}{32}\,a^4, \qquad J_2 = \frac{\sqrt{3}}{96}\,a^4,$$

siendo a el lado del triángulo.

Los ejes de la elipse de inercia están entre sí como

$$\sqrt{J_2} : \sqrt{J_1}, \text{ o sea como } 1 : 3.$$

127. El eje de simetría de la sección es uno de los ejes principales de inercia J_1 del c. d. g.; el otro J_2 será perpendicular. Para la distancia de O al c. d. g. se tiene



$$\overline{OS} = x_s = \frac{37}{28\sqrt{2}}\,l.$$

El m. de i. principal J_1 es la diferencia de los m. de i. de ambos cuadrados

$$J_1 = \frac{1}{12}\,l^4 - \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\,l\right)^4 = \frac{175}{3072}\,l^4.$$

Para calcular J_2 hállese, empleando el mismo procedimiento, el m. de i. J con la ayuda de ambos cuadrados, y se tendrá

$$J = \frac{1}{12}\,l^4 + l^2 \cdot \overline{OS_1}^2 - \left[\frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\,l\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\,l\right)^2 \cdot \overline{OS_2}^2\right]$$

$$\overline{OS_1} = \frac{l}{\sqrt{2}}, \qquad \overline{OS_2} = \frac{3}{4}\,\frac{l}{\sqrt{2}}$$

y

$$J = \frac{1225}{3072}\,l^4.$$

Finalmente, resulta

$$J_2 = J - F \cdot \overline{OS}^2,$$

en que la sección es $F = \frac{7}{16}\,l^2$, lo cual, en definitiva, da

$$J_2 = \frac{361}{21504}\,l^4.$$

128. El eje de simetría que pasa por O es uno de los ejes principales de inercia. El m. de i. para el mismo es

$$J_2 = \frac{a^4}{12}(1 - n^4).$$

Trazando el normal a ese J_1, se obtiene con ayuda de la fórmula (20)

$$J_1 = \frac{a^4}{12} + a^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left[\frac{n^4 a^4}{12} + n^2 a^2 \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = \frac{a^4}{12}(7 - 6n^2 - n^4).$$

Introduciendo ahora la relación

$$\frac{J_1}{J_2} = 1 + \frac{6}{1 + n^2} = 5,$$

se tiene

$$n = 1/\sqrt{2}.$$

129. La parte de sección entre M y N tiene una altura $\frac{H}{2} - \frac{r\pi}{4}$, y su m. de i. respecto al eje J es

$$J_1 = \frac{1}{24}\left[B\left(H - \frac{r\pi}{2} + 2r\right)^3 - (B - d)\left(H - \frac{r\pi}{2} + 2r - 2a\right)^3 - 8dr^3\right].$$

Del mismo modo, el m. de i. del trozo desde P hasta Q respecto al eje J será

$$J_2 = \frac{1}{12}\left[aB^3 + \left(\frac{H}{2} - \frac{r\pi}{4} - a\right)d^3\right].$$

El m. de i. del trozo curvo desde N hasta Q respecto al eje J es, según el problema 114,

$$J_3 = \frac{rd}{4}\left[r^2(3\pi - 8) + d^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)\right].$$

El m. de i. total de los dos hierros en I doblados, para el eje J es, pues,

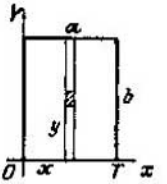
$$J = 2(J_1 + J_2 + J_3).$$

Como al eje de gravedad J' perpendicular a J corresponde igual m. de i., se deduce, según el problema 123, que los m. de i. respecto a todos los ejes que pasan por el centro son iguales; los ejes de simetría i_1 e i_2 de la sección tienen, pues, los m. de i. principales

$$i_1 = J \quad \text{y} \quad i_2 = J.$$

130. El momento centrífugo es, en general,

$$J_{xy} = \int xy\,df.$$



Haciendo para el elemento de área del rectángulo $df = dx\,dy$, se tiene

$$J_{xy} = \iint xy\,dx\,dy = \int_0^a x\,dx \cdot \int_0^b y\,dy = \frac{1}{4}a^2b^2.$$

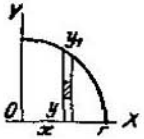
Este resultado coincide con la fórmula (31) poniendo en ella $F = ab$, $\xi = a/2$, $\eta = b/2$.

131. Utilizando la fórmula (31) se tiene

$$J_{xy} = \frac{1}{4}(a^2c^2 + b^2d^2 - c^2d^2).$$

132. Utilizando la fórmula (31) se deduce

$$J_{xy} = ac\left(f + \frac{c}{2}\right)\left(d + e - \frac{a}{2}\right) + d(b - c)\left(e + \frac{d}{2}\right)\left(f - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right).$$



133. $$J_{xy} = \iint xy\,dx\,dy = \int_0^r [x \int_0^{y_1} y\,dy]\,dx$$

$$= \int_0^r x\,\frac{y_1^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^r x\,(r^2 - x^2)\,dx = \frac{r^4}{8}.$$

134. Se tiene, como en el problema anterior,

$$J_{xy} = \int_m^{r+m} [x \int_n^{y_1} y\,dy]\,dx, \quad \text{en que} \quad (y_1 - n)^2 = r^2 - (x - m)^2,$$

$$J_{xy} = \frac{1}{2}\int_m^{r+m} x\,[r^2 - (x - m)^2 + 2n\sqrt{r^2 - (x - m)^2}]\,dx,$$

y haciendo $x - m = z$,

$$J_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^r (z + m)\,[r^2 - z^2 + 2n\sqrt{r^2 - z^2}]\,dz,$$

$$J_{xy} = \frac{r^4}{8} + \frac{r^3}{3}(m + n) + \frac{\pi r^2 mn}{4}.$$

135. Se procede como en el problema 133:

$$J_{xy} = \iint xy\,dx\,dy = \int_0^a \left[x \int_0^{y_1} y\,dy\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^a x y_1^2\,dx.$$

Se tiene $y_1^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$, siendo a y b los semiejes de la elipse. De aquí resulta

$$J_{xy} = a^2 b^2/8.$$

136. Utilizando la fórmula (33) se deduce inmediatamente

$$J_{xy} = \frac{ab}{12}(a^2 - b^2)\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi.$$

137. Utilizando la fórmula (33) se tiene

$$J_{xy} = \frac{ab\pi}{4}(a^2 - b^2)\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi,$$

siendo φ la inclinación de uno de los ejes coordenados respecto a uno de los ejes de la elipse.

138. Utilizando las fórmulas (34) y (35) se tiene

$$J_x = ab^3/3 = 18 \text{ cm.}^4, \qquad J_y = ba^3/3 = 8 \text{ cm.}^4,$$

$$J_{xy} = a^2b^2/4 = 9 \text{ cm.}^4,$$

$$J_{1,2} = 13 \pm \sqrt{106} \text{ cm.}^4,$$

de donde

$$J_1 = 23{,}2956 \text{ cm.}^4, \quad J_2 = 2{,}7044 \text{ cm.}^4 \text{ y } \varphi = 30^\circ\,28'\,22''.$$

139. Aplicando las fórmulas (34) y (35) se tiene

$$J_x = 299\,441 \text{ mm.}^4, \quad J_y = 989\,291 \text{ mm.}^4,$$

$$J_{xy} = 98\,931 \text{ mm.}^4 \text{ (según el problema 131)},$$

de donde

$$J_1 = 1\,003\,198 \text{ mm.}^4, \quad J_2 = 285\,534 \text{ mm.}^4,$$

$$\alpha = 8^\circ\, 0'\, 7''.$$

140. Primeramente se tiene

$$J_x = \pi r^4/8, \quad J_y = 5\pi r^4/8.$$

Trazando por el c. d. g. del semicírculo un sistema de ejes $x'\,y'$ paralelo a x, y, el momento centrífugo $J_{x'y'} = 0$ y, por lo tanto, según la fórmula (30),

$$J_{xy} = \frac{\pi r^2}{2} r \frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3} r^4.$$

Utilizando ahora la fórmula (35),

$$J_{1,2} = \left[\frac{3\pi}{8} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{4}{9}}\right] r^4,$$

y, por lo tanto, los m. de i. principales serán

$$J_1 = 2{,}2082\, r^4, \qquad J_2 = 0{,}1480\, r^4.$$

Finalmente, según la fórmula (34),

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 8/3\pi, \qquad \alpha = 20^\circ\, 9'\, 46'',$$

y

$$\varphi = 90^\circ - \alpha = 69^\circ\, 50'\, 14''.$$

141. Sea S el c. d. g. de la sección compuesta, y sean e_1, e_2 sus coordenadas para el sistema inferior de ejes J_1, J_2; trazando por S unos ejes x, y paralelos a J_1 J_2 se tiene

$$J_x = J_1 + J_2 + 2Fe_2^2,$$

$$J_y = J_1 + J_2 + Fe_1^2,$$

y por la fórmula (31),

$$J_{xy} = 2Fe_1 e_2.$$

Según la fórmula (34), tendremos $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2e_1 e_2}{e_2^2 - e_1^2}$ y $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{e_2}{e_1}$, es decir que la recta S_1, S_2 es un eje principal de inercia de la sección. Las fórmulas (35) dan a continuación los momentos de inercia principales de la sección

$$J_{min} = J_1 + J_2, \quad J_{máx} = J_1 + J_2 + Fa^2/2.$$

142. Se tiene primeramente

$$J_y = 2\,\frac{1}{3}\left[1{,}3\,(8 - 0{,}5)^3 + (20 - 1{,}3) \cdot 0{,}5^3\right] = 367{,}18 \text{ cm.}^4,$$

$$J_x = 2\,\frac{1}{3}\left[8\left(\frac{20}{2}\right)^3 - (8 - 1)\,(10 - 1{,}3)^3\right] = 2260{,}32 \text{ cm.}^4,$$

$$J_{xy} = -2\,[(8 - 1) \cdot 1{,}3] \cdot 9{,}35 \cdot 4 = -680{,}68 \text{ cm.}^4$$

según la fórmula (31), el rectángulo 20 cm. × 1 cm. a lo largo del eje de las y tiene un momento centrífugo nulo; no quedan, pues, más que los rectángulos laterales, cuya área individual es (8 — 1) 1,3 cm.², y cuyo c. d. g. tiene las coordenadas 9,35 cm. y 4 cm.]

Las fórmulas (34) y (35) dan

$$J_1 = 2480 \text{ cm.}^4, \quad J_2 = 148 \text{ cm.}^4, \quad \alpha = 17^\circ\ 51'\ 36''$$

y como la sección tiene un área $F = 38{,}2$ cm.², la fórmula (28) da definitivamente

$$i_1 = \sqrt{J_1/F} = 8{,}06 \text{ cm.}, \quad i_2 = \sqrt{J_2/F} = 1{,}97 \text{ cm.}$$

para semiejes de la elipse central; el i_1 se lleva sobre J_2 y el i_2 sobre J_1.

148. Sea

$$\measuredangle\, AMC = \varphi, \quad \measuredangle\, DOx = \alpha,$$

se tiene

$$\varphi = \pi - 2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{MA}} = \frac{J_{xy}}{(J_x - J_y)/2}$$

o bien

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x},$$

una expresión que coincide con la fórmula (34).

Además, es

$$\overline{CD} = \overline{MD} - \overline{MC} = \overline{OM} - (\overline{MA}\cdot\cos\varphi + \overline{AC}\cdot\operatorname{sen}\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y)\cos 2\alpha - J_{xy}\operatorname{sen} 2\alpha$$

$$= J_x\cos^2\alpha + J_y\operatorname{sen}^2\alpha - J_{xy}\operatorname{sen} 2\alpha;$$

esta expresión coincide con la fórmula (32), es, pues, el m. de i. $J_{x'}$ correspondiente al eje $\overline{OD}$; como $\overline{OD}$ era eje principal, $J_{x'}$ es uno de los momentos de inercia principales, a saber, el pequeño J_2. Como

$$J_x + J_y = J_1 + J_2,$$

resulta $\overline{CE} = J_1$.

144. La demostración para J'_x y J'_y es la misma del problema anterior para J_1 y J_2.

Además se tiene

$$\measuredangle\, OMG = \measuredangle\, ACF = 2\alpha$$

y

$$\overline{FC} = \overline{MA}\cdot\operatorname{sen} 2\alpha + \overline{AC}\cdot\cos 2\alpha = \frac{1}{2}(J_x - J_y)\operatorname{sen} 2\alpha + J_{xy}\cos 2\alpha,$$

expresión que coincide con la de $J_{x'y'}$ según la fórmula (33).

145. Sea dF un elemento cualquiera de la superficie; u y v sus distancias ortogonales a x' e y'; tendremos

$$J_{x'y'} = \int uv\,dF.$$

Ahora bien:

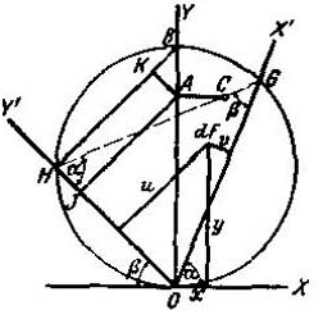
$$u = y \cos \beta + x \operatorname{sen} \beta,$$
$$v = y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha,$$

de donde

$$J_{x'y'} = J_x \cos \alpha \cos \beta - J_y \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$
$$- J_{xy} \operatorname{sen} (\alpha - \beta)$$

o bien

$$J_{x'y'} = \overline{OA} \cdot \cos \alpha \cos \beta$$
$$- \overline{AB} \cdot \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - \overline{AC} \cdot \operatorname{sen} (\alpha - \beta).$$



El segundo miembro es nulo, como se deduce considerando el rectángulo, $AKHJ$, cuyos vértices JK y A distan de $\overline{HG}$ las magnitudes $\overline{AB}$ sen α sen β $\overline{OA}$ cos α cos β y $\overline{AC}$ sen $(\alpha - \beta)$.

146. Trazando por B_1 una paralela a J_2, el m. de i. de la sección F respecto a ella es

$$J_2 = J_1 + F \cdot \overline{FS}^2 = J_1 + F (i_1^2 - i_2^2),$$

y como

$$J_2 = F i_2^2 \quad \text{resulta} \quad J_2 = F i_1^2 = J_1.$$

Los dos m. de i. principales para el punto B_1 son, pues, iguales a J_1 y, por lo tanto, también lo serán los m. de i. para todas las rectas que pasen por B_1.

147. Se traza por O un sistema de ejes x, O, y paralelo a J_1, S, J_2, y se llaman a y b las coordenadas de S respecto a dicho sistema.

Teniendo en cuenta las fórmulas (20) y (21) se tiene

$$J_x = J_1 + F b^2 = F (i_1^2 + b^2),$$
$$J_y = J_2 + F a^2 = F (i_2^2 + a^2),$$
$$J_{xy} = F a b;$$

además,

$$\operatorname{tg} (B_1 Ox) = \frac{b}{a + e}, \quad \operatorname{tg} (B_2 Ox) = \frac{b}{a - e}.$$

Haciendo

$$e = \overline{SB_1} = \overline{SB_2} = \sqrt{i_1^2 - i_2^2}$$

y llamando al ángulo $\sphericalangle J Ox = \alpha$, se tiene

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} (B_1 Ox + B_2 Ox)$$

$$= \frac{\dfrac{b}{a + e} + \dfrac{b}{a - e}}{1 - \dfrac{b^2}{a^2 - e^2}} = \frac{2ab}{a^2 - e^2 - b^2} = \frac{2ab}{(i_2^2 + a^2) - (i_1^2 + b^2)}$$

o

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x},$$

una expresión que coincide con la fórmula (34).

148. Se tiene

$$\overline{PM}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{NM}^2 = e^2 + \overline{MB}_1^2 - \overline{NB}_1^2 = e^2 + i_1^2 - \overline{SB}_1^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Ahora bien: según el problema **146**,

$$\overline{SB}_1^2 = i_1^2 - i_2^2,$$

o sea

$$\overline{PM}^2 = e^2 + i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

o

$$Fi^2 = Fe^2 + J_1^2 \cos^2 \alpha + J_2^2 \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

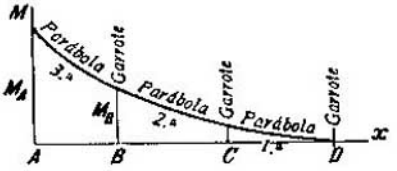
y por la ec. (29), $J = Fe^2 + J_x$, que coincide con la ec. (20).

---

149. $M_A = Pl + P_1 l_1 + P_2 l_2 + ql^2/2.$

$M_B = P(l - l_2) + P_1(l_1 - l_2) + q(l - l_2)^2/2.$

$M_C = P(l - l_1) + q(l - l_1)^2/2.$



Ecuaciones de los diagramas:

Trozo $\overline{AB}$: $M = Pl + P_1 l_1 + P_2 l_2 + ql^2/2 - (P + P_1 + P_2 + ql)x + qx^2/2.$

Trozo $\overline{BC}$: $M = Pl + P_1 l_1 + ql^2/2 - (P + P_1 + ql)x + qx^2/2.$

Trozo $\overline{CD}$: $M = Pl + ql^2/2 - (P + ql)x + qx^2/2.$

150. $M_A = Pl + P_1 l_1 + q(l^2 - l_1^2)/2.$

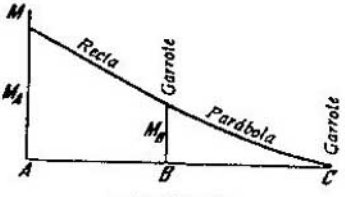
$M_B = P(l - l_1) + q(l - l_1)^2/2.$

$M_C = 0.$

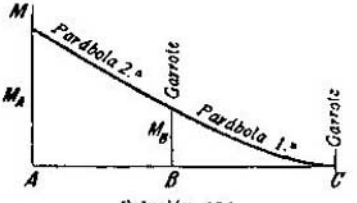
Ecuaciones de los diagramas:

Trozo $\overline{AB}$: $M = Pl + P_1 l_1 + q(l^2 - l_1^2)/2 - (P + P_1 + q[l - l_1])x.$

Trozo $\overline{BC}$: $M = Pl + ql^2/2 - (P + ql)x + qx^2/2.$



Solución 150



Solución 151

151. $M_A = q(l^2 - l_1^2)/2 + q_1 l_1^2/2.$

$M_B = q(l - l_1)^2/2.$

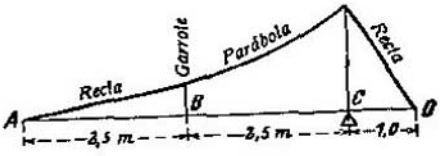
$M_C = 0.$

Ecuaciones de los diagramas:

Trozo $\overline{AB}$: $M = q(l^2 - l_1^2)/2 + q_1 l_1^2/2 - (q[l - l_1] + q_1 l_1)x + q_1 x^2/2.$

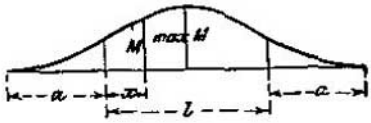
Trozo $\overline{BC}$: $M = ql^2/2 - qlx + qx^2/2.$

152. $P = 25{,}625$ t.



Presión sobre el apoyo
$C = 32{,}125$ t.,
$M_B = 10$ mt.,
$M_D = 25{,}626$ mt.

153. Como no hay apoyos, tampoco hay reacciones; las cargas dadas están en equilibrio entre sí. Se tiene, pues,



$$M = \frac{1}{2}\, Q \left(\frac{x^2}{l} - x - \frac{a}{2}\right)$$

para el trozo medio y

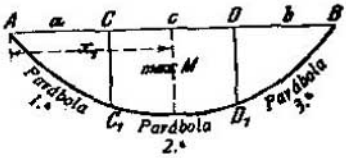
$$M_{máx} = -\frac{Q}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{l}{4}\right).$$

154. En los puntos C_1 y D_1 de la línea de momentos la inclinación de las tangentes es continua. Las reacciones en los apoyos son:

$$A = Q_1\left(1 - \frac{a}{2l}\right) + Q_2\frac{b}{2l} + Q_3\frac{2b + c}{2l},$$

$$B = Q_1\frac{a}{2l} + Q_2\left(1 - \frac{b}{2l}\right) + Q_3\frac{2a + c}{2l},$$

$$M_{máx} = \left(A - \frac{Q_1}{2}\right)a + \frac{(A - Q_1)^2}{2Q_3}c$$



$$x_1 = a + \frac{A - Q_1}{Q_3}c.$$

Deben cumplirse las condiciones

$$x_1 > a \qquad \text{y} \qquad x_1 < a + c,$$

o bien

$$(Q_1 a - Q_2 b) \begin{matrix} < Q_3(2b + c) \\ > -Q_3(2a + c). \end{matrix}$$

Si no se cumple la primera condición, $M_{máx}$ está en el trozo $\overline{AC}$, y vale

$$M_{máx} = \frac{A^2 a}{2Q_1}, \qquad \text{con} \qquad x_1 = \frac{Aa}{Q_1}.$$

Si, por el contrario, no se cumple la segunda condición, $M_{máx}$ está en el trozo $\overline{DB}$, y se tiene

$$M_{máx} = \frac{B^2 b}{2Q^2} \qquad \text{con} \qquad l - x_1 = \frac{Bb}{Q^2}.$$

155. Los puntos C_1, D_1 de la línea de momentos son angulosos. Las reacciones en los apoyos son:

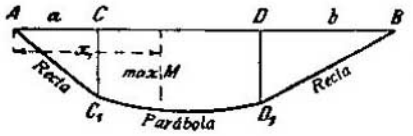
$$A = P_1\left(1 - \frac{a}{l}\right) + P_2\frac{b}{l} + Q\frac{l - a + b}{2l},$$

$$B = P_1\frac{a}{l} + P_2\left(1 - \frac{b}{l}\right) + Q\frac{l + a - b}{2l}.$$

$$M_{máx} = Aa + \frac{(A - P_1)^2}{2Q}(l - a - b),$$

con la abscisa

$$x_1 = a + \frac{A - P_1}{Q}(l - a - b).$$



Condición:

$$x_1 > a \quad \text{y} \quad x_1 < l - b$$

o

$$\left|\frac{P_1 a - P_2 b}{Q} + \frac{a - b}{2}\right| \begin{matrix} < + l/2, \\ > - l/2. \end{matrix}$$

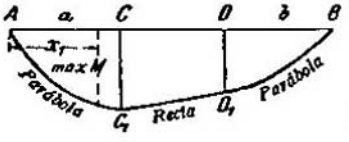
Si no se cumple alguna de las dos, se tiene o bien

$$M_{\text{máx}} = A\,a \quad \text{en} \quad C, \quad \text{o bien} \quad M_{\text{máx}} = B\,b \quad \text{en} \quad D.$$

156. La línea de momentos tiene en C_1 un punto anguloso, en D_1 la dirección de las tangentes es continua. Las reacciones de los apoyos son:

$$A = P\left(1 - \frac{a}{l}\right) + Q_1\left(1 - \frac{a}{2l}\right) + Q_2\frac{b}{2l},$$

$$B = P\frac{a}{l} + Q_1\frac{a}{2l} + Q_2\left(1 - \frac{b}{2l}\right).$$



$M_{\text{máx}}$ está o bien en el trozo $\overline{AC}$, y su valor es

$$M_{\text{máx}} = \frac{A^2 a}{2Q_1}, \quad \text{con} \quad x = \frac{A\,a}{Q_1},$$

cuando se cumple la condición

$$x_1 < a \quad \text{ó} \quad Q_1 a - Q_2 b > 2P(l - a).$$

O bien $M_{\text{máx}}$ está en el trozo $\overline{DB}$, y vale

$$M_{\text{máx}} = \frac{B^2 b}{2Q^2}, \qquad l - x_1 = \frac{B\,b}{Q_2},$$

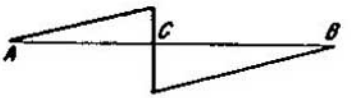
cuando se cumple la condición

$$x_1 > l - b \qquad \text{ó} \qquad Q_2 b - Q_1 a > 2P\,a.$$

Si no se cumple ninguna de las dos condiciones, se tiene

$$M_{\text{máx}} = (A - Q_1/2)\,a \text{ en } C.$$

157. Sean B_1, B_2 las componentes vertical y horizontal de la reacción de la articulación B, y sea A la reacción vertical del apoyo A; tendremos $A = B_1 = Pp/l$; $B = P_2$; $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$, debiéndose tener en cuenta que A va dirigida hacia abajo, y B_1, hacia arriba. Las líneas de momentos en los trozos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ son paralelas, y su ecuación para el trozo $\overline{AC}$ es



$$M = -\frac{Pp}{l}x.$$

En el punto C el momento flector tiene un salto que vale Pp/l, pasando desde $-Ppa/l$ hasta $+Ppb/l$.

158. La reacción en A vale

$$A = \frac{q}{l}\left(l^2 - l\xi + \frac{\xi^2}{2}\right) + P\left(1 - \frac{\xi}{l}\right).$$

El momento en C es

$$M = A\xi - q\xi^2/2.$$

Haciendo $\frac{dM}{d\xi} = 0$, se obtiene la abscisa de momento máximo, o sea

$$\frac{\xi}{l} = 1 + \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\sqrt{3 + 6\alpha + 4\alpha^2},$$

en donde $\alpha = P/ql$. La segunda raíz no es válida porque ξ debe ser menor que l.

159. Las reacciones de los apoyos son:

$$A = al/3, \qquad B = al/6.$$

La carga que actúa en un punto ξ (por unidad de longitud) es

$$q = a(1 - \xi/l),$$

y el momento flector en una sección a la distancia x de A vale

$$M = Ax - \int_0^x q(x - \xi)\,d\xi = \frac{ax}{6l}(2l^2 - 3xl + x^2).$$

Para la sección peligrosa x_1 haremos $\frac{dM}{dx} = 0$, de donde

$$2l^2 - 6x_1 l + 3x_1^2 = 0$$

y

$$x_1 = l(1 - 1/\sqrt{3}) = 0{,}4226\,l,$$

$$M_{\text{máx}} = \sqrt{3}\,al^2/27 = 0{,}0641\,al^2.$$

160. La reacción en el apoyo A es $2ql/9$.

Sea y la ordenada de la línea de cargas del primer trozo, a la distancia x del punto A, se tiene $y = \frac{3q}{2l}x$, y el momento flector en x es

$$M = Ax - \frac{1}{2}xy\frac{x}{3} = Ax - \frac{q}{4l}x^3.$$

Haciendo $\frac{dM}{dx} = 0$, se tiene $x_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}l = 0{,}5443\,l$,

y, por lo tanto, $M_{\text{máx}} = \frac{8\sqrt{2}}{81\sqrt{3}}ql^2 = 0{,}0806\,ql^2$.

161. El momento flector debajo de P es

$$M = \frac{x}{l}[P(l - x) + Q(l - x - a)].$$

Haciendo $\frac{dM}{dx} = 0$, se obtiene para la abscisa buscada

$$x = \frac{l}{2} - \frac{Qa}{2(P+Q)},$$

y el momento flector máximo es

$$M_{máx} = \frac{[Pl + Q(l-a)]^2}{4(P+Q)l}.$$

162. Reacciones: $A = -P_1\frac{a}{l} + P_2\left(1 - \frac{b}{l}\right) + P_3\frac{c}{l}$,

$$B = P_1\left(1 + \frac{a}{l}\right) + P_2\frac{b}{l} + P_3\left(1 - \frac{c}{l}\right).$$

Máximo momento flector: o bien en B con un valor

$$M_B = -P_1 a,$$

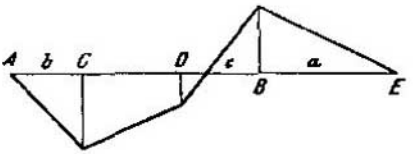
o en C

$$M_C = A\,b,$$

o en D

$$M_D = A(l-c) - P_2(l-b-c).$$

Si $M_D = 0$ ó



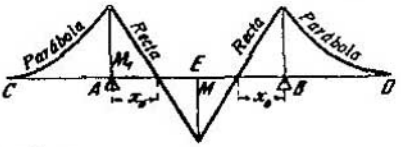
$$P_2 = P_1\frac{a}{c} - P_2\frac{b}{l-c},$$

el punto de inflexión está en D. Si P_2 es menor que ese valor, el punto de inflexión está entre C y D a la distancia

$$x_0 = \frac{P_2 b l}{P_1 a + P_2 b - P_2 c} \text{ de } A.$$

Si P_2 es mayor que aquel valor, el punto de inflexión está entre D y B a la distancia

$$x_0 = \frac{P_2 b + P_3(l-c)}{P_1 a + P_2 b + P_3(l-c)}\,l \text{ de } A.$$



168. Reacciones en los apoyos:

$$A = B = Q + P/2.$$

Máximo momento flector: o bien

$$M_1 = -Qa/2 \text{ en } A \text{ y } B,$$

o bien

$$M = \frac{1}{4}Pl - \frac{1}{2}Qa \text{ en } E, \text{ según que } \frac{P}{Q} \lessgtr \frac{4a}{l}.$$

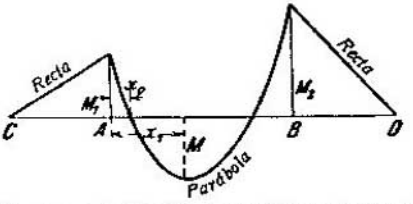
Puntos de inflexión: $x_0 = \frac{Q}{P}a = x_0'$.

164. Reacciones de los apoyos:

$$A = P_1\left(1 + \frac{a}{l}\right) - P_2\frac{a}{l} + \frac{Q}{2},$$

$$B = P_2\left(1 + \frac{a}{l}\right) - P_1\frac{a}{l} + \frac{Q}{2}$$

El máximo momento flector vale: o bien $M_1 = -P_1 a$ en el punto A, o bien $M_2 = -P_2 a$ en el punto B, o bien



$$M = \frac{(P_1 - P_2)^2 a^2}{2Ql} - (P_1 + P_2)\frac{a}{2} + Q\frac{8}{l}$$

a la distancia

$$x_1 = \frac{l}{2} + \frac{P_1 - P_2}{Q} a \text{ de } A.$$

Puntos de inflexión: sus distancias x_0 de A son las raíces de la ecuación

$$x^2 - x\left(l + 2\frac{P_1 - P_2}{Q} a\right) + 2\frac{P_1}{Q} a l = 0.$$

165. Reacciones de los apoyos:

$$A = Q\frac{l + a}{2l} - P\frac{a}{l}.$$

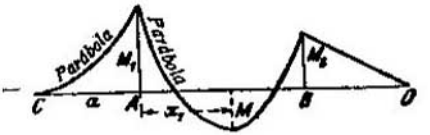
$$B = Q\frac{l - a}{2l} + P\left(1 + \frac{a}{l}\right).$$

Momento flector máximo: o bien

$$M_1 = -\frac{Q}{2}\frac{a^2}{l + a} \text{ en } A,$$

o bien

$$M_2 = -Pa \text{ en } B,$$



o sea

$$M = \frac{Q}{8l^2(l + a)}\left\{\left[l^2 + a^2 - 2\frac{P}{Q}a(l + a)\right]^2 - 4l^2a^2\right\}$$

a la distancia

$$x_1 = \frac{l}{2} + \frac{a^2}{2l} - \frac{P}{Q}\frac{(l + a)}{l} \text{ de } A.$$

Puntos de inflexión: sus distancias x_0 de A son las raíces de la ecuación

$$x^2 - 2x\left[\frac{l^2 + a^2}{2l} - \frac{P}{Q}\frac{a(l + a)}{l}\right] + a^2 = 0.$$

166. Las reacciones de los apoyos son, en general,

$$A = P\frac{b}{l} + ql_1\left(1 + \frac{l_1}{2l}\right), \qquad B = P\frac{a}{l} - \frac{1}{2}q\frac{l_1^2}{l}.$$

Los momentos flectores en A y D son

$$M_A = -\frac{1}{2}ql_1^2, \qquad M_D = \frac{Pab}{l} - \frac{1}{2}qb\frac{l_1^2}{l}$$

Haciendo $-M_A = M_D$, se tiene

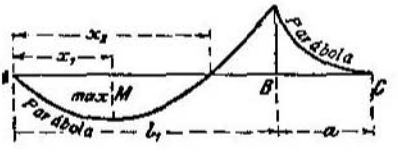
$$l_1 = \sqrt{\frac{2Pab}{q(l + b)}};$$

además,
$$M_D = \frac{Pab}{l+d} = -M_A,$$
$$A = \frac{2Pb}{l+b} + ql_1, \qquad B = \frac{Pa}{l+b}.$$

167. La reacción en A es $q(l/2 - x)$; el momento flector en C, $M_C = Ax$, y el momento flector en B, $M_B = -qx^2/2$. Haciendo $M_C = -M_B$ resulta $x = l/3$ y $M = ql^2/18$ para el valor absoluto de ambos momentos.

168. Debe elegirse z de modo que los momentos flectores sean lo más pequeños posible. Como los momentos máximos corresponden a los apoyos A y B y al punto medio de la viga, su valor será un mínimo cuando sean iguales entre sí. El momento flector en A y B vale (prescindiendo del signo) $\frac{q}{8}(l-z)^2$, y en el punto medio, $\frac{ql}{4}\left(z - \frac{l}{2}\right)$; igualándolos se tiene
$$z = (2 - \sqrt{2})\, l = 0{,}586\, l.$$

169. Reacciones de los apoyos: $A = ql(1 - l/2l_1)$, $B = ql^2/2l_1$. En el trozo $\overline{AB}$ el momento flector vale $M = Ax - qx^2/2$. Haciendo
$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \text{resulta} \quad x_1 = \left(1 - \frac{l}{2l_1}\right) l$$
y
$$+M_{máx} = \frac{1}{2} q l^2 \left(1 - \frac{l}{2l_1}\right)^2$$



Otro máximo del momento flector corresponde al punto B, y su valor es
$$-M_{máx} = -\frac{1}{2} q l^2 \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2$$
(No es un máximo analítico, puesto que $\frac{dM}{dx}$ no es cero.)

El momento flector es nulo para
$$x_2 = 2x_1 = (2 - l/l_1)\, l.$$

170. La máxima capacidad de resistencia de la viga se obtendrá cuando el máximo momento flector del trozo $\overline{AB}$ sea igual al del apoyo B, es decir, valiéndose de los resultados obtenidos en el problema anterior, cuando
$$\frac{1}{2} q l^2 \left(1 - \frac{l}{2l_1}\right)^2 = \frac{1}{2} q l^2 \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2,$$
de donde se deduce para la luz del tramo $\overline{AB}$
$$l_1 = l/\sqrt{2} = 0{,}7071\, l = 4{,}243 \text{ m}.$$
Cada uno de los máximos momentos flectores valdrá entonces
$$M_{máx} = \frac{1}{2} q l^2 \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = 0{,}0429\, q l^2.$$

El m. de i. de la sección respecto al eje horizontal de gravedad es

$$J = \frac{1}{12}[20\cdot 100^3 - 4\cdot 94^3 - 14\cdot 92^3 - 2\cdot 78^3] = 402\,244 \text{ cm.}^4,$$

y el momento resistente, siendo $e = 50$ cm.,

$$W = J/e = 8044{,}88 \text{ cm.}^3$$

De la igualdad $M_{máx} = k_b W$:

$$0{,}0429\cdot q\cdot 600^2 = 700\cdot 8044{,}8$$

se deduce la carga $q = 364{,}63$ kg./cm.

o $q = 364\,63$ kg./m.

De esta manera las reacciones de apoyos (véase el problema anterior) serán

$$A = ql(1 - l/2l_1) = 0{,}2929\, ql = 64\,080 \text{ kg.},$$

$$B = ql^2/2l_1 = 0{,}7071\, ql = 154\,798 \text{ kg.}$$

171. Reacciones de los apoyos:

$$A = \frac{1}{2}al^2\left(1 - \frac{2l}{3l_1}\right), \qquad B = \frac{1}{3}\frac{al^3}{l_1}.$$

El momento flector en la sección x es

$$M = Ax - \frac{1}{2}qx\frac{x}{3} = Ax - \frac{1}{6}ax^3. \qquad \text{(a)}$$

Haciendo $\frac{dM}{dx} = 0$, se hallará para la abscisa del momento flector máximo un valor

$$x_1 = l\sqrt{1 - 2l/3l_1},$$

y el valor del momento máximo será

$$+M_{máx} = \frac{1}{3}al^2\sqrt{\left(1 - \frac{2l}{3l_1}\right)^3}.$$

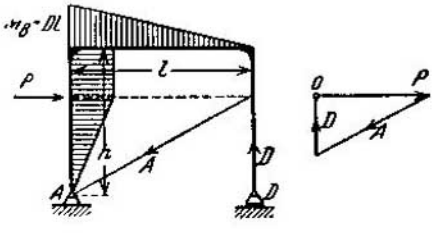
El mayor valor negativo del momento flector corresponde al apoyo B, o sea a $x = l_1$, que introducido en la expresión (a) da

$$-M_{máx} = -(2l^3 + l_1^3 - 3l^2l_1)\, a/6.$$

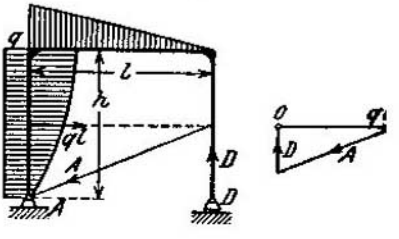
(¡No es un máximo analítico!) Haciendo en la ecuación (a) $M = 0$, se tiene para la abscisa que se busca

$$x_2 = x_1\sqrt{3} = l\sqrt{3 - 2l/l_1}.$$

172.

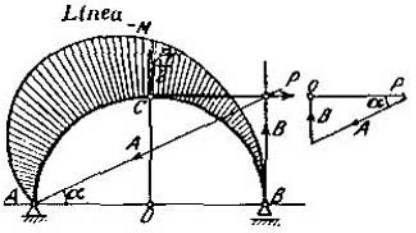


173.



174. Del polígono de fuerzas se deduce

$$B = P/2, \qquad A = P\sqrt{5}/2.$$



Los momentos flectores están dados por las expresiones (véase la figura). Para el trozo BC,

$$M = \frac{Pr}{2}(1 - \cos\varphi);$$

para el trozo CA,

$$M = -\frac{Pr}{2}(1 + \cos\varphi - 2\,\mathrm{sen}\,\varphi).$$

---

175. Siendo y la altura de la viga correspondiente a la abscisa x, tendremos

$$x = \frac{l}{h_1 - h_2}(h_1 - y).$$

El momento flector en este punto (prescindiendo del signo) es $M = P(l - x)$; el momento resistente de la sección rectangular es $W = by^2/6$, siendo b su anchura. En la sección peligrosa el trabajo en la fibra extrema, es decir, M/W, ha de ser máximo; luego

$$\frac{l - x}{y^2} = \frac{l}{h_1 - h_2}\,\frac{y - h_2}{y^2}$$

ha de ser máximo; por lo tanto, debe verificarse la condición

$$\frac{1}{y} - \frac{h_2}{y^2} = M.$$

Igualando a cero la primera derivada de M, resulta $y = 2h_1$, y sustituyendo este valor en la segunda derivada, se tiene

$$\frac{2}{y_3} - \frac{6h_1}{y_4} = -\frac{2}{8h_2^2} < 0.$$

Se obtiene, pues, para la sección peligrosa:

$$x = l\,\frac{h_1 - 2h_2}{h_1 - h_2} \quad \text{y} \quad M_{\text{máx}} = \frac{Plh_2}{h_1 - h_2}.$$

176. La altura de la viga a la distancia x del empotramiento es

$$h = h_1 - (h_1 - h_2)\,x/l,$$

y el momento flector en ese punto,

$$M = qx\,(l - x)/2;$$

por lo tanto, la tensión en las fibras extremos de la sección será

$$\sigma = \frac{Mh}{2J} = \frac{3q}{b}\,\frac{x\,(l - x)}{h^2}.$$

Hallando el máximo del factor $x(l - x)/h^2$, se tiene para la sección peligrosa:

$$x_1 = l\,\frac{h_1}{h_1 + h_2}, \quad h = \frac{2h_1h_2}{h_1 + h_2}, \quad \sigma_{\text{máx}} = \frac{3ql^2}{4bh_1h_2}.$$

177. El c. d. g. de la sección dista 33,5 mm. del canto superior. Para que la resistencia sea igual, debe verificarse la condición

$$k'_d : k'_s = e_d : e_1 = (100 - 33{,}5) : 33{,}5$$

o sea

$$k'_d : k'_s = 1{,}985 : 1.$$

178. El c. d. g. de la sección dista de la arista superior

$$e_1 = \frac{1232x + 900}{44x + 300}.$$

La condición de igual resistencia da

$$e_1 : e_2 = k'_s : k'_d$$

o

$$e_1 : (50 - e_1) = 3 : 8,$$

de donde

$$e_1 = \frac{3}{11}\,50 \text{ y } x = 5 \text{ mm.}$$

179. Se tiene

$$e_1 = 12 \text{ cm.}, \qquad z_0 = 6{,}9 \text{ cm.}, \qquad \mu_0 = 1{,}2;$$

luego, según la fórmula de Bach,

$$k'_b = \mu_0 k'_t \sqrt{e_1/z_0} = 238 \text{ at.}$$

180. Se tiene

$$\mu_0 = \frac{4}{3}, \qquad e_1 = \frac{D}{2}, \qquad z_0 = \frac{2}{3\pi}\,\frac{1 - a^3}{1 - a^2}\,D,$$

de donde

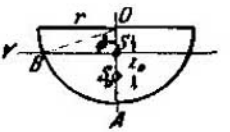
$$k'_b = \frac{2}{3}\,k'_s \sqrt{\frac{3\pi\,(1 - a^2)}{1 - a^3}}.$$

181. Sea S el c. d. g. del semicírculo, y S_0 el c. d. g. del segmento situado por debajo de S_y; haciendo $\measuredangle\, A\,O\,B = \varphi$, se tiene

$$e_1 = \overline{SA} = r\,(1 - 4/3\pi) = 0{,}576\,r,$$

$$z_0 = \frac{2}{3}\,r\left[\frac{\operatorname{sen}^3\varphi}{\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi} - \frac{2}{\pi}\right] = 0{,}237\,r.$$

Pero $\cos\varphi = \dfrac{4}{3\pi}$, de donde $\varphi = 64^\circ\,53'\,11''$ y en radianes, $\varphi = 1{,}132$. Sustituyendo valores resulta



$$k'_b = \mu_0\,k'_t \sqrt{\frac{e_1}{z_0}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1250\sqrt{\frac{0{,}576}{0{,}237}} = 433 \text{ at.}$$

para el coeficiente de trabajo buscado.

182. El eje Sy del m. de i. principal mayor J_1 es el de simetría de la sección, el Sz es normal a él; aplicando la fórmula (36) y su figura, podremos escribir

$$\alpha = 135^\circ, \qquad \beta = \alpha - \varphi,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{J_1}{J_2}\operatorname{tg} 135^\circ,$$

de donde

$$\varphi = 30^\circ\ 15'\ 23''.$$

183. En el problema **127** se dedujeron los m. de i. principales para el c. d. g., cuyos valores eran :

$$J_1 = \frac{175}{3072}\, l^4, \qquad J_2 = \frac{361}{21\,504}\, l^4.$$

Utilizando la fórmula (36) y su figura, se tiene

$$\beta = -45^\circ, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{J_2}{J_1} \operatorname{tg} \beta,$$

de donde

$$\alpha = -16^\circ\, 25'\, 12''$$

y

$$\varphi = 28^\circ\, 34'\, 48''.$$

184. Utilícense las fórmulas (36) y (38). El mayor de los m. de i. principales es

$$J_1 = 81\,392 \text{ cm.}^4,$$

y el menor,

$$J_2 = 50\,832 \text{ cm.}^4, \qquad \text{además} \qquad \alpha = 30^\circ,$$

de donde la inclinación de la línea neutra SN respecto al lado más corto resulta ser

$$\beta = 42^\circ\, 45'\, 7''.$$

Los puntos más cargados de la sección son B y D; siendo $y = -15$ cm. y $z = +20$ cm., se obtiene aplicando la fórmula (38) para el punto B un coeficiente de trabajo $\sigma = -43$ at.

Del mismo modo para el punto D, se tiene $\sigma = +43$ at.

185. La inclinación β de la línea neutra SN respecto al eje de J_1 se deduce de la fórmula (36)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_1}{J_2} \operatorname{tg} \alpha, \qquad \beta = 82^\circ\, 15'\, 6'',$$

de donde

$$\varphi = \beta - \alpha = 63^\circ\, 28'\, 26''.$$

Los puntos más cargados de la sección son A y B.

Calculando las coordenadas de A respecto al sistema de ejes principales J_1 y J_2 con los valores

$$y = 10 \operatorname{sen} \alpha + 0{,}5 \cos \alpha = +3{,}69 \text{ cm.},$$

$$z = -10 \cos \alpha + 0{,}5 \operatorname{sen} \alpha = -9{,}31 \text{ cm.},$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula (18)

$$\sigma = k_b = 700 = M \left(\frac{y \operatorname{sen} \alpha}{J_2} - \frac{z \cos \alpha}{J_1} \right),$$

de donde

$$M = 491 \text{ mkg.}$$

186. Sustituyendo en la fórmula (38) para las coordenadas de E los valores

$$y = b/2, \qquad z = -h/2,$$

y siendo, además, los m. de i. principales

$$J_1 = b h^3/12, \qquad J_2 = b^3 h/12,$$

la tensión en el punto E es

$$\sigma = \frac{6M}{bh} \left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{b} \right).$$

Haciendo $\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0$, se tiene $\operatorname{tg} = \frac{h}{b}$, esto es, que el eje del momento flector M está en una de las diagonales; además $\frac{d^2\sigma}{d\alpha^2} < 0$.

Según la fórmula (36), la posición del eje de flexión (o fibra neutra) está determinada por la ecuación

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_1}{J_2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{h^2}{b^2}.$$

La posición más desfavorable de la viga tendrá lugar, pues, cuando M actúe en la otra diagonal (no en la que pasa por E).

La tensión máxima en E es

$$\sigma_{máx} = \frac{6M\sqrt{b^2+h^2}}{b^2h^2}.$$

187. La demostración se deduce del problema **145.** Trazando la recta HG que allí se utilizó por el punto O, la x' cae sobre OC y la y' sobre x; el momento centrífugo para las rectas OC y Ox se anula, y lo mismo sucede en el actual problema para las rectas SC y Sx, es decir que estas rectas corresponden a diámetros conjugados de la elipse central. Si el par flector de fuerzas está en la recta Sx, SC será, pues, la correspondiente línea neutra.

---

188. El máximo momento flector corresponde a la sección de empotramiento

$$M_{máx} = Pl + P_1l_1 + P_2l_2 = 410 \text{ mkg}.$$

Las cargas prácticas son

$$k_z' = \frac{1}{11}\,470 = 43 \text{ at.}, \qquad k_d' = \frac{1}{6}\,280 = 47 \text{ at.}$$

La zona de tracción es la más cargada y sirve de base para el cálculo. Siendo $b = 5\,h/7$, tendremos

$$M_{máx} = k_z W = k_z\frac{1}{6}bh^2 = k_z\frac{5}{42}h^2,$$

de donde $\qquad h = 20$ cm., $\qquad b = 14{,}3$ cm.

189. De $P\cdot 100 + Q\cdot 140 = k_b'\frac{1}{6}bh^2$ se deduce

$$Q = 16\,428 \text{ kg}.$$

190. En el caso a) la máxima carga admisible es

$$P = k_b'\frac{bh^2}{6l} = 383{,}3 \text{ kg.};$$

en el caso b),

$$P = k_b'\frac{b^2h}{6l} = 273{,}8 \text{ kg}.$$

191. Como la viga está empotrada en un extremo y las cargas actúan hacia abajo, el trasdós está sometido a tracción y el intradós a compresión. El c. d. g. de la sección dista de la arista superior $e_1 = 4{,}02\,x$, y de la inferior $e_2 = 7{,}98\,x$. Como

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{4{,}02}{7{,}98} > \frac{300 \text{ at.}}{800 \text{ at.}},$$

el cálculo de tracciones es el que sirve de base. El momento flector en el apoyo es

$$\left(P + \frac{G}{2}\right) l = k'_b \frac{J}{e_1},$$

la sección es $F = 25x^2$; el peso de la viga, $G = \gamma F l = 0{,}0075 \cdot F \cdot 300 = 56{,}25\,x^2$ (poniendo x en cm.).

El m. de i. de la sección respecto a la arista superior es $J_1 = 844{,}33\,x^4$, y respecto a la horizontal que pasa por el centro de gravedad es

$$J = J_1 - Fe_1^2 = 440{,}32\,x^4.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación del momento flector, y haciendo $l = 300$ cm. y $k'_b = 300$ at., resulta para x la ecuación

$$x^3 = 0{,}257\,x^2 + 27{,}389,$$

cuya raíz utilizable es

$$x = 3{,}1 \text{ cm.}$$

192. $J = 2709$ cm.^{4}, momento resistente $W = 270{,}9$ cm.^{3}; $Pl = k'_b\,W$, de donde $P = 1084$ kg.

193. Sea P la fuerza tangencial en la llanta, y v la velocidad lineal en la misma; la potencia será $Pv = 75\,N$, y como $v = \frac{d\,n\,\pi}{60}$, se tiene

$$P = \frac{60 \cdot 75 \cdot N}{d \cdot n\,\pi} = 715{,}5 \text{ kg.}$$

A cada radio corresponde $P/4$, y considerándolo como una viga empotrada en el eje,

$$\frac{P}{4} \cdot \frac{d}{2} = k'_b W.$$

La tensión o coeficiente de trabajo por flexión para la fundición es, según la fórmula (42),

$$k'_b = \frac{4}{3}\,k'_z \sqrt{\frac{e_1}{z_n}}, \quad \text{y como} \quad e_1 = \frac{a}{2} \text{ y } z_n = \frac{2\,a}{3\pi},$$

resulta

$$k'_b = \frac{4}{3}\,k'_z \sqrt{\frac{3\pi}{4}} = 307 \text{ at.}$$

El momento resistente respecto al eje de gravedad de la elipse es

$$W = \frac{J}{a/2} = \frac{\pi}{32}\,a^2 b = \frac{\pi}{64}\,a^3.$$

Sustituyendo valores resulta

$$\frac{P}{4}\,\frac{d}{2} = 307 \cdot \frac{\pi}{64}\,a^3,$$

de donde $\qquad a = 6{,}2$ cm., $\qquad b = a/2 = 3{,}1$ cm.

194. La viga se romperá cuando el esfuerzo de tracción P del perno alcance el valor

$$P = \frac{1}{l}\,\frac{1}{6}\,bh^2K_b = 1880 \text{ kg.}$$

La rotura del perno ocurriría para la fuerza

$$P_1 = \frac{\pi d^2}{4}\,K_z = 3142 \text{ kg.}$$

195. La presión del viento sobre el poste cuya sección longitudinal es $d \cdot l$, vale $0{,}785\, d \cdot l \cdot 125$ (poniendo l y d en m.); el momento en el empotramiento será $0{,}785 \cdot d \cdot l \cdot 125 \cdot l/2$; igualándolo a $k_b \cdot \frac{\pi}{32}\, d^3$ y teniendo en cuenta que

$$k_b = \frac{1}{10}\,420 = 42 \text{ at.} = 42 \cdot 10^4 \text{ kg./m.}^2,$$

resulta

$$d = 0{,}345 \text{ m.}$$

196. Sea $F/2$ la sección, y $J/2$ el m. de i. para el correspondiente eje de gravedad; el momento resistente de la sección a la distancia x del extremo superior será

$$W = \frac{J + F(z - e)^2}{z},$$

y la carga de trabajo en las fibras extremas de esta sección,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Px}{W} = \frac{Pl}{b - a}\,\frac{z(z - a)}{J + F(z - e)^2}.$$

Hallando el máximo del factor que depende de z, se halla la ecuación de condición

$$F(2e - a)\,z_1^2 - 2(J + Fe^2)\,z_1 + a(J + Fe^2) = 0,$$

de donde se deduce la semianchura de la sección peligrosa

$$z_1 = \frac{\sqrt{J + Fe^2}}{F(2e - a)}\left[\sqrt{J + Fe^2} + \sqrt{J + F(a - e)^2}\right].$$

Como en este resultado no entran ni b ni l, se puede poner $b = z_1$ para que la sección peligrosa sea precisamente la de empotramiento. Se supone $2e > a$.

197.

Momento en el apoyo: $M_A = P_2 a + P_1 l.$

Reacción en el apoyo: $A = P_1 + P_2.$

Momento flector en el trozo $\overline{AB}$: $M = -M_A + Ax = -EJ\,\frac{d^2y}{dx^2}$;

por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EJ}\left(-M_A x + A\,\frac{x^2}{2}\right),$$

y

$$y = -\frac{1}{EJ}\left(-M_A\,\frac{x^2}{2} + A\,\frac{x^3}{6}\right).$$

Momento flector en el trozo $\overline{BC}$:

$$M = -M_A + Ax - P_2(x-a) = -P_1(l-x),$$

y, por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_1}{EJ}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1,$$

$$y = \frac{P_1}{EJ}\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1 x + D_1.$$

En el punto B, y y $\frac{dy}{dx}$ tomarán los mismos valores en los dos trozos, de donde para $x = a$ se deducen los valores

$$C_1 = \frac{P_2 a^2}{2EJ}, \qquad D_1 = -\frac{P_2 a^3}{6EJ},$$

y de la ecuación del segundo trozo $\overline{BC}$, para $x = l$, resulta la flecha

$$f = \frac{1}{6EJ}[2P_1 l^3 + P_2 a^2(3l - a)].$$

197 a. La fuerza P_2 actuando sola produciría en B la flecha (tabla 1, número 4)

$$f_2 = \frac{P_2 a^3}{3EJ},$$

y la inclinación de la viga sería

$$\operatorname{tg}\psi_2 = \frac{P_2 a^2}{2EJ}.$$

El trozo $\overline{BC}$ de viga se inclina sin doblarse cuando actúa sólo la P_2, y el extremo C toma la flecha

$$f' = f_2 + (l-a)\operatorname{tg}\psi_2.$$

Al actuar la fuerza P_1 en C, se produce en C la flecha

$$\frac{P_1 l^3}{3EJ}.$$

La flecha total en C es

$$= \frac{P_1 l^3}{3EJ} + f_2 + (l-a)\operatorname{tg}\psi_2$$

o bien

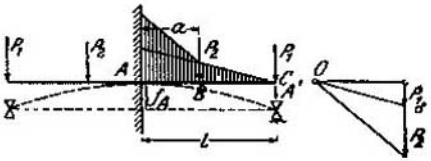
$$f = \frac{1}{6EJ}[2P_1 l^3 + P_2 a^2(3l - a)]$$

como antes.

197 b. Se llevan los momentos (divididos por EJ) como «carga virtual» de la viga. Para tener en cuenta las condiciones límites, se considera prolongada simétricamente la viga con su carga hacia la izquierda, se supone que en su extremo C tiene un simple apoyo y que la carga actúa hacia arriba. Se calcula la reacción de apoyo A' y el momento flector por efecto de esta carga virtual en el punto medio A de la viga as prolongada.

La reacción del apoyo A' es

$$A' = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2}P_1 l^2 + \frac{1}{2}P_2 a^2\right] = \psi_C,$$



y la flecha buscada viene medida por el momento flector debido a la carga virtual

$$f_A = A'l - \frac{1}{2}P_1 l^2 \frac{l}{3} - \frac{1}{2}P_2 a^2 \frac{a}{3} = \frac{1}{6EJ}\left[2P_1 l^3 + P_2 a^2 (3l - a)\right]$$

como antes.

198. La ecuación diferencial de la línea elástica es

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ},$$

de donde, teniendo en cuenta las condiciones de empotramiento o integrando, resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Mx}{EJ}, \qquad y = \frac{Mx^2}{2EJ};$$

por lo tanto,

$$\psi_B = \frac{Ml}{EJ}, \qquad f_B = \frac{Ml^2}{2EJ}.$$

Utilizando el teorema de Mohr se obtiene, como en el problema **197 b**

$$A' = \frac{Ml}{EJ} = \psi_B, \qquad f_B = A'l - \frac{Ml^2}{2EJ} = \frac{Ml^2}{2EJ}.$$

199.

Momento en el apoyo: $M_A = 3ql^2/8$.

Reacción en el apoyo: $A = ql/2$.

Trozo $\overline{AB}$: momento flector:

$$M = -M_A + Ax.$$

Ecuación de la elástica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{1}{EJ}(-M_A + Ax).$$

Primera integración:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EJ}\left(-M_A x + A\frac{x^2}{2}\right) + C;$$

y como $\quad x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad$ se deduce $\quad C = 0.$

Segunda integración:

$$y = -\frac{1}{EJ}\left(-M_A \frac{x^2}{2} + A\frac{x^3}{6}\right) + D;$$

y como $\quad x = 0, \quad y = 0, \quad$ resulta $\quad D = 0.$

Trozo $\overline{BC}$: momento flector:

$$M = -M_A + Ax - \frac{q}{2}\left(x - \frac{l}{2}\right)^2,$$

y haciendo $l - x = x_1$ se obtiene $M = -qx_1^2/2$.

Ecuación de la línea elástica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx_1^2}{2EJ}.$$

De donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qx_1^3}{6EJ} + C_1$$

y

$$y = \frac{qx_1^4}{24EJ} + C_1x + D_1.$$

En el punto B los valores de y y de $\frac{dy}{dx}$ son los mismos para los dos trozos; por lo tanto, para $x = x_1 = l/2$, tendremos

$$-\frac{1}{EJ}\left(-\frac{1}{8}M_Al^2 + \frac{1}{48}Al^3\right) = \frac{1}{384}\frac{ql^4}{EJ} + C_1\frac{l}{2} + D_1,$$

$$-\frac{1}{EJ}\left(-\frac{1}{2}M_Al + \frac{1}{8}Al^2\right) = -\frac{1}{48}\frac{ql^3}{EJ} + C_1,$$

de donde

$$C_1 = \frac{7}{48}\frac{ql^3}{EJ}, \qquad D_1 = -\frac{5}{128}\frac{ql^4}{EJ}.$$

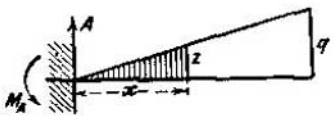
La inclinación ψ de la viga en C es

$$\operatorname{tg}\psi = C_1 = \frac{7}{48}\frac{ql^3}{EJ},$$

y la flecha f en C,

$$f = C_1l + D_1 = \frac{41}{384}\frac{ql^4}{EJ}.$$

Resolver este problema y los que siguen empleando los procedimientos usados en los problemas 197 a, b.



200.

Momento en el apoyo: $M_A = ql^2/3$.

Reacción en el apoyo: $A = ql/2$.

Momento flector en la sección x:

$$M = -M_A + Ax - \frac{1}{2}qx\frac{x}{3} = -M_A + Ax - \frac{qx^3}{6l}.$$

Ecuación de la línea elástica: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$;

y efectuando una primera integración

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EJ}\left[-M_Ax + \frac{1}{2}Ax^2 - \frac{qx^4}{24l}\right],$$

e integrando por segunda vez

$$y = -\frac{1}{EJ}\left[-\frac{1}{2}M_A x^2 + \frac{1}{6}A x^3 - \frac{q x^5}{120 l}\right];$$

y para $x = l$

$$f = \frac{11}{120}\frac{q l^4}{EJ}.$$

201. Según la tabla 1, n.° 6, el peso propio a la izquierda de A produce la flecha $f_1 = \frac{81}{40}\frac{G a^3}{EJ}$, y el de la derecha de B, $f_2 = \frac{2}{5}\frac{G a^3}{EJ}$ (¡obsérvese que $q = G/5al$).

Según la tabla 1, n.° 4, la fuerza P produce en B la flecha

$$f_3 = \frac{1}{3}\frac{P a^3}{EJ} + a \operatorname{tg}\psi, \quad \text{siendo} \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{P a^2}{2EJ}.$$

Haciendo $f_1 = f_2 + f_3$, resulta

$$P = 1{,}95\ G.$$

201 a. Sea q la carga uniforme debida al peso propio; la flecha en el extremo libre será, según la tabla 1, n.° 6,

$$f = \frac{q l^4}{8EJ}.$$

El momento resistente respecto a la horizontal que pasa por el centro de gravedad es

$$J = \frac{1}{12}[12{,}5\cdot 30^3 - 11{,}42\cdot 26{,}76^3] = 9888 \text{ cm.}^4$$

El área de la sección es $F = 69{,}4$ cm.^{2};

por lo tanto, $q = F\gamma = 69{,}4\cdot 0{,}0078 = 0{,}5413$ kg./cm.,

y la longitud libre buscada será

$$l = \sqrt[4]{\frac{8fEJ}{q}} = 874{,}4 \text{ cm.}$$

202. El diámetro z en el punto x es

$$z = h_1 - \frac{h_1 - h_2}{l}x.$$

Sustituyendo en la ecuación (41) de la línea elástica

$$M = -P(l - x), \quad J = \frac{\pi}{64}z^4,$$

se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\frac{z - h_2}{z^4}, \quad \text{siendo} \quad k = \frac{64Pl}{E\pi(h_1 - h_2)},$$

o también

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{kl^2}{(h_1 - h_2)^2}\frac{z - h_2}{z^4}.$$

La primera integración da

$$\frac{dy}{dz} = \frac{kl^2}{(h_1 - h_2)^2}\left[\frac{h_2}{3z^3} - \frac{1}{2z^2}\right] + C,$$

y como $z = h_1$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{h_1 - h_2}{l}\frac{dy}{dz} = 0$, para $x = 0$ se deduce

$$C = \frac{kl^2(3h_1 - 2h_2)}{6h_1^3(h_1 - h_2)^2}.$$

La segunda integración nos da

$$y = \frac{kl^2}{(h_1 - h_2)^2}\left[\frac{1}{2z} - \frac{h_2}{6z^2}\right] + Cz + D. \qquad \text{(a)}$$

y como $z = h_1$, $y = 0$, para $x = 0$ resulta

$$D = -\frac{kl^2(2h_1 - h_2)}{2h_1^3(h_1 - h_2)^2}.$$

La flecha en el extremo se obtiene por medio de la ec. (a) poniendo $z = h_2$; así resulta

$$f = \frac{kl^2}{(h_1 - h_2)^2}\left[\frac{1}{2h_2} - \frac{1}{6h_2}\right] + Ch_2 + D,$$

o

$$f = \frac{64}{3\pi}\frac{Pl^3}{Eh_1^3h_2}.$$

203. Solución análoga a la del problema anterior. Resulta $= \frac{2}{3}\frac{\gamma l^4}{Eh^2}$, siendo γ el peso específico.

204. Según la tabla 1, n.° 6, la flecha en el extremo vale

$$f = \frac{qx^4}{8EJ},$$

siendo $J = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = 4637$ cm.^{4}, y R, r los radios de la sección.

Sección de hierro: $F = \pi(R^2 - r^2) = 113{,}09$ cm.^{2}
Peso de hierro por cm. de longitud $= 0{,}882$ kg.
Peso de agua por cm. de longitud $= 0{,}201$ kg.;

por lo tanto, $q = 0{,}882 + 0{,}201 = 1{,}083$ kg./cm.

y

$$x = \sqrt[4]{\frac{8fEJ}{q}} = 430{,}2 \text{ cm.}$$

205. Sea z el diámetro variable de una sección, y x su distancia al extremo libre B; según la ec. (41), tendremos

$$E\frac{\pi z^4}{64}\frac{d^2y}{dx^2} = Px.$$

La primera integración da

$$\frac{E\pi}{64P}\cdot\frac{dy}{dx} = \int_l^x \frac{x\,dx}{z^4},$$

y la segunda,

$$\frac{E\pi}{64P}y = \int_l^x \left[\int_l^x \frac{x}{z^4}\,dx\right] dx.$$

La flecha en B, o sea para $x = 0$, es, pues,

$$f = \frac{64P}{E\pi}\int_l^0 \left[\int_l^x \frac{x}{z^4}\,dx\right] dx.$$

Integrando por partes, la integral toma la forma

$$\int_l^0 \left[\int_l^x \frac{x}{z^4}\,dx\right] dx = \left[x\int_l^0 \frac{x}{z^4}\,dx\right]_l^0 - \int_l^0 \frac{x^2}{z^4}\,dx = \int_0^l \frac{x^2}{z^4}\,dx.$$

Para la flecha más pequeña f, la integral ha de tener un valor mínimo: efectuando la variación de z y permaneciendo x constante, tendremos

$$\delta f = 0 \;\text{ó}\; \int_l^0 \frac{4x^2dx}{z^5}\,\delta z = 0. \qquad \textbf{(a)}$$

Por otra parte, la cantidad de material o volumen de la viga es

$$V = \frac{\pi}{4}\int_0^l z^2\,dx$$

constante, o sea que al variar z

$$\delta V = 0, \text{ o bien} \int_0^l 2z\delta z dx = 0. \qquad \textbf{(b)}$$

Las ecuaciones (a) y (b) son compatibles, siempre que

$$z = c\sqrt[3]{x},$$

en donde $c\,(\neq 0)$ significa una constante.

---

206. Las reacciones de los apoyos son:

$$A = 4ql/9, \qquad B = 2ql/9.$$

El momento flector en el trozo $\overline{AC}$ a la distancia x de A vale

$$M = Ax - qx^2/2.$$

Haciendo $\frac{dM}{dx} = 0$, resulta para la abscisa correspondiente al momento flector máximo (sección peligrosa) el valor

$$x = 4l/9, \qquad M_{\text{máx}} = 8ql^2/81.$$

La ecuación de la línea elástica correspondiente al trozo $\overline{AC}$ es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{1}{EJ}\left(Ax - \frac{1}{2}qx^2\right)$$

e integrando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{6}qx^3\right) + C', \qquad \text{(a)}$$

$$y = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{6}Ax^3 - \frac{1}{24}qx^4\right) + C'x. \qquad \text{(b)}$$

La ecuación de la línea elástica del trozo $\overline{CB}$ es

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -\frac{M_1}{EJ} = -\frac{Bx_1}{EJ},$$

contando la abscisa x_1 a partir del apoyo B; integrando sale

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{Bx_1^2}{2EJ} + C_1, \qquad \text{(c)}$$

$$y_1 = -\frac{Bx_1^3}{6EJ} + C_1x_1. \qquad \text{(d)}$$

En el límite C de ambos trozos se tiene

$$x = \frac{2}{3}l, \quad x_1 = \frac{1}{3}l, \quad y = y_1, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{dy_1}{dx_1}.$$

Sustituyendo estos valores se tiene $C' = \frac{8}{243}\frac{ql^3}{EJ}$, y de la ecuación se deduce para y con el valor $x = l/2$

$$f = \frac{305}{31104}\frac{ql^4}{EJ}.$$

207. Las reacciones de los apoyos son

$$A = 920 \text{ kg.}, \qquad B = 880 \text{ kg.}$$

Los momentos flectores en C, D, E

$$M_C = 920 \text{ mkg.}, \quad M_D = 1400 \text{ mkg.}, \quad M_E = 440 \text{ mkg.}$$

El máximo momento flector M_D sirve de base para continuar el cálculo

$$M_D = 140\,000 \text{ cmkg.} = k_b' \, J/e_1.$$

El m. de i. J de la sección vale

$$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}D^4(1 - a^4),$$

siendo

$$a = d/D = 0{,}6; \quad e_1 = D/2.$$

El coeficiente de trabajo por flexión, de la fundición es, según la fórmula (42),

$$k_b' = \frac{4}{3}k_z'\sqrt{\frac{e_1}{z_0}}, \quad z_0 = 0{,}26\,D$$

y haciendo

$$k'_r = 300 \text{ at.}; \qquad k_b = 556 \text{ at.}$$

La igualdad (a) nos da inmediatamente

$$D = 14{,}4 \text{ cm.}; \qquad d = 8{,}6 \text{ cm.}$$

208. El momento máximo corresponde al punto de acción de la carga, y su valor es

$$M = P\,\frac{a\,(l-a)}{l},$$

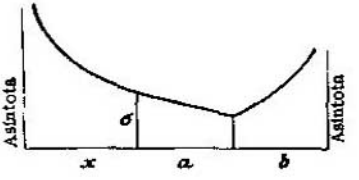
que es igual a

$$M = W\,k'_b.$$

De donde resulta

$$P = \frac{l}{a\,(l-a)}\,k'_b\,W = 10{,}7 \text{ t.}$$

209. La reacción del apoyo en A es



$$A = \frac{1}{48}\,\frac{\pi\gamma d^2}{a+b}\,(a^2 + 4ab + 3b^2),$$

y el momento flector en x,

$$M = A\,x - \pi\gamma x^2 y^2/48,$$

siendo $y = x\,d/a$ el diámetro correspondiente a x.

El coeficiente de trabajo en x vale

$$\sigma_{máx} = \frac{Me}{J} = \frac{32}{\pi}\,\frac{M}{y^3} = \frac{2\gamma a}{3d}\left[\frac{a^2\,(a+3b)}{x^2} - x\right].$$

210. Siendo z el radio de la sección donde actúa P, se tiene

$$z = r\,(1 - x/l).$$

El momento flector bajo la carga es $M = Px\,(l-x)/l$, y el momento resistente, $W = \pi z^3/4$; por lo tanto, la tensión en la fibra extrema es

$$\sigma = \frac{4Pl^3}{\pi r^3}\,\frac{x\,(l-x)}{(l+x)^2}.$$

Haciendo $\dfrac{d\sigma}{dx} = 0$, la abscisa de la máxima tensión resulta ser

$$x_1 = (2 - \sqrt{3})\,l = 0{,}2679\,l,$$

y la tensión vale

$$\sigma_{máx} = \frac{2}{3\sqrt{3}\,\pi}\,\frac{Pl}{r^3} = 0{,}1225\,\frac{Pl}{r^3}.$$

211. Para calcular fácilmente el momento de inercia de la sección, se toma el del rectángulo circunscrito y se restan de él los momentos de inercia de los rectángulos que faltan. Con referencia a la horizontal que pasa por el centro de gravedad, se tiene

$$J = \frac{1}{12}\,[30\cdot 50^3 - 7\cdot 44^3 - 17\cdot 41^3 - 3\cdot 24^3] = 161\,715 \text{ cm.}^4$$

El momento flector máximo correspondiente al punto medio de la viga es

$$ql^2/8 + Pa = k'_b\,J/e.$$

Haciendo $q = 40$ kg./cm., $l = 800$ cm., $a = 200$ cm., $e = 25$ cm., se tiene

$$P = 27\,986{,}5 \text{ kg.}$$

212. Area de la sección: $F = 224$ cm.² Peso por centímetro de longitud:

$$q = F\gamma = 224 \cdot 0{,}0078 = 1{,}7472 \text{ kg./cm.}$$

La viga se calcula según la tabla 1, n.° 3,

$$M_{máx} = ql^2/8 = K_b W.$$

En el primer caso (ala de 20 cm. horizontal) se tiene

$$J_1 = \frac{1}{12}[20 \cdot 40^3 - 16 \cdot 36^3] = 44\,459 \text{ cm.}^4;$$

y resulta

$$W = \frac{J_1}{20} = 2222{,}95 \text{ cm.}^3,$$

$$= 71{,}338 \text{ m.}$$

En el segundo caso (altura 40 cm. horizontal) se tiene

$$J_2 = \frac{1}{12}[4 \cdot 20^3 + 36 \cdot 4^3] = 2859 \text{ cm.}^4,$$

$$W = \frac{J_2}{10} = 285{,}9 \text{ cm.}^3,$$

y resulta

$$l = 25{,}584 \text{ m.}$$

213. La sección del tubo es $F = 59{,}69$ cm.²; el peso propio, 0,448 kg./cm., y el peso del agua, 0,254 kg./cm.; en total: $q = 0{,}702$ kg./cm. El máximo momento flector tiene lugar en el punto medio del tubo y vale, según la tabla 1, n.° 3,

$$M_{máx} = qx^2/8 = k'_b W = k'_b J/e,$$

siendo el m. de i. de la sección, $J = 2701$ cm.⁴, $e = 10$ cm. y $k'_b = 300$ at. Con estos datos se tiene

$$x = 9{,}61 \text{ cm.}$$

214. Poniendo en la tabla 1, n.° 1, para el máximo momento flector $M_{máx} = Pab/l$,

$$a = 100 \text{ cm.}, \quad b = 300 \text{ cm.}, \quad l = 400 \text{ cm.}, \quad P = 1000 \text{ kg.},$$

se obtiene

$$M_{máx} = 75\,000 \text{ cmkg.} = k_b J/e,$$

en donde

$$J = s^4/12, \quad e = s/2, \quad k_b = 70 \text{ at.}$$

Así resulta

$$s = 18{,}6 \text{ cm.}$$

Las reacciones de los apoyos son:

$$A = \frac{3}{4}P = 750 \text{ kg.}, \quad B = \frac{1}{4}P = 250 \text{ kg.}$$

Poniendo

$$A = k'_s \pi d_1^2/4, \qquad B = k'_s \pi d_2^2/4,$$

se tiene

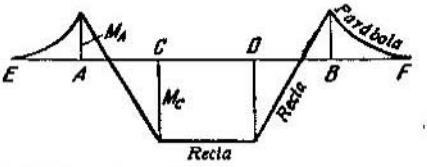
$$d_1 = 1{,}2 \text{ cm.} \qquad \text{y} \qquad d_2 = 0.7 \text{ cm.}$$

215. Reacciones de los apoyos: $A = B = 4{,}8$ t.

Momentos flectores:

$$M_A = -1{,}35 \text{ mt.},$$

$$M_C = +3{,}15 \text{ mt.}$$



Para una sección a la distancia x de A, el momento flector es

$$M = -q \cdot 1{,}5\,(0{,}75 + x) + A\,x,$$

y para $M = 0$ se tiene

$$x_1 = 0{,}45 \text{ m.}$$

Poniendo el máximo momento flector

$$M_{máx} = M_C = 315\,000 \text{ cmkg} = k'_b \frac{1}{6}\, b h^2 = k'_b \frac{5}{42}\, h^3$$

resulta

$$h = 35{,}4 \text{ cm.}, \qquad b = 25{,}3 \text{ cm.}$$

216. $P = 7{,}8$ t., $D = 33{,}8$ t. El máximo momento flector es $M = 64$ m., y la sección peligrosa está en B.

El m. de i. de la sección para el eje horizontal que pasa por el centro de gravedad es

$$J = \frac{1}{12}\,[20\,x^3 - 17{,}2\,(x - 2{,}8)^3 - 2{,}8\,(x - 30)^3]$$

$$= 33{,}04\,x^3 - 663{,}7\,x + 6331{,}46.$$

Haciendo

$$M = k'_b \frac{J}{e}, \quad \text{o sea} \quad 6400\,000 = 800\,\frac{J}{x/2},$$

se halla para x la ecuación

$$x^3 - 141{,}15\,x + 191{,}63 = 0$$

y

$$x = 139{,}8 \text{ cm.}$$

La segunda raíz no es válida.

217. El m. de i. de la sección total respecto al eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale

$$J = (1152 + 2 \cdot 1563 + 4 \cdot 400) \text{ cm.}^4 = 5878 \text{ cm.}^4$$

La sección total es

$$F = (24 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 3{,}27) \text{ cm.}^2 = 57{,}08 \text{ cm.}^2,$$

y el peso propio por m. l.,

$$\gamma F = 44{,}9 \text{ kg/m.}$$

La carga total que ha de tenerse en cuenta es, pues,

$$q = 300 \text{ kg./m.} = 3 \text{ kg./cm.}$$

El valor de la flecha en el punto medio de una viga simplemente apoyada es (tabla 1, n.° 3)

$$f = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}$$

y con los datos conocidos ($E = 2 \cdot 10^6$ at.)

$$l^4 = 1505 \cdot 10^8 \text{ cm.}$$

y

$$l = 6{,}23 \text{ m.}$$

218. El máximo momento flector corresponde al punto medio, y vale

$$M = \frac{qz}{2}(l - z).$$

Partiendo del momento resistente **dado** W y del coeficiente de trabajo k_b', tendremos

$$W k_b' = M = \frac{qz}{2}(l - z),$$

de donde (utilizando sólo el valor positivo de la raíz cuadrada), resulta

$$z = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{2 W k_b'}{q}}.$$

---

219. El momento flector es el mismo para todas las secciones de la viga, y vale M. El radio de curvatura de la línea elástica será, según la ecuación (40),

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{M}{EJ} = \text{constante.}$$

La línea elástica es, pues, un arco de círculo.

La cuerda del arco es la luz l de la viga, y la flecha en el punto medio se deduce de la ecuación

$$(l/2)^2 = f(2\varrho - f),$$

y aproximadamente

$$f = \frac{l^2}{8\varrho} = \frac{Ml^2}{8EJ}.$$

El ángulo ψ de inclinación de la viga en los apoyos vale

$$\psi \approx \operatorname{sen}\psi = \frac{l}{2\varrho} = \frac{Ml}{2EJ}.$$

Puede hallarse también integrando la ecuación de la línea elástica $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}$ o aplicando el teorema de Mohr.

220. Según la tabla 1, n.° 1, la sección de máxima flecha tiene una abscisa $x' = \sqrt{(l^2 - a^2)/3}$. Sustituyendo ξ en lugar de a y $l - \xi$ en lugar de b, la abscisa correspondiente a la sección de máxima flecha, contada desde el apoyo B, es

$$x' = \sqrt{(l^2 - \xi^2)/3}.$$

Al tomar ξ todos los valores desde 0 hasta $l/2$, x' recorre el segmento desde $l/\sqrt{3}$ hasta $l/2$. Las máximas flechas corresponden, por lo tanto, a la parte central de la viga, cuyos extremos están a 0,077 l del punto medio.

221. La ecuación de la línea elástica del trozo $\overline{AC}$ es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{Px}{EJ},$$

de donde, integrando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{2EJ} + C_1,$$

$$y = -\frac{Px^3}{6EJ} + C_1 x.$$

La segunda constante de integración es cero, pues para $x = 0$, $y = 0$.

La ecuación de la línea elástica del trozo $\overline{CD}$ es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pa}{EJ}$$

e integrando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Pax}{EJ} + C_2,$$

$$y = -\frac{Pax^2}{2EJ} + C_2 x + D.$$

Teniendo en cuenta la condición $\frac{dy}{dx} = 0$ para $x = \frac{l}{2}$, se obtiene $C_2 = \frac{Pal}{2EJ}$, y observando que en el punto C (para $x = a$) es continua la dirección de las tangentes a las líneas elásticas, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Pa^2}{2EJ} + C_1 = -\frac{Pa^2}{EJ} + C_2,$$

$$y = -\frac{Pa^3}{6EJ} + C_1 a = -\frac{Pa^3}{2EJ} + C_2 a + D,$$

de donde resultan

$$C_1 = \frac{Pa}{2EJ}(l - a) \quad \text{y} \quad D = -\frac{Pa^3}{6EJ}.$$

Con estos valores se halla la flecha en el punto medio

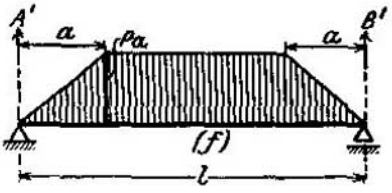
$$f = \frac{Pa}{24EJ}(3l^2 - 4a^2).$$

Todavía resulta más sencillo aplicar el teorema de Mohr: Se considera el área de los momentos como una carga virtual; las reacciones de apoyos correspondientes (véase la figura) son

$$A' = B' = \frac{1}{2}[Pa(l - 2a) + Pa^2] = \frac{Pa(l - a)}{2EJ}$$

y la flecha en el punto medio es

$$f = A'\frac{l}{2} - \frac{1}{EJ}\left[\frac{Pa^2}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{2a}{3}\right) + Pa\frac{l-2a}{2}\,\frac{l-2a}{4}\right] = \frac{Pa}{24EJ}(3l^2 - 4a^2)$$



como antes.

222. Se hallan las flechas o bien directamente estableciendo las ecuaciones de la línea elástica para los trozos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$ o también, y más sencillamente, utilizando la tabla 1, n.° 1, para determinar primeramente las flechas en C y D debidas a la carga P_1 obrando sola y sumándoles las que corresponden a P_2 obrando también sola. Se halla así, teniendo en cuenta que C está a la izquierda de P_2,

$$f_1 = \frac{P_1}{3EJl}a_1^2(l - a_1)^2 + \frac{P_2}{6EJl}a_1 b_2(l^2 - a_1^2 - b_2^2)$$

y del mismo modo para la sección D

$$f_2 = \frac{P_2}{3EJl}b_2^2(l - b_2)^2 + \frac{P_1}{6EJl}a_1 b_2(l^2 - a_1^2 - b_2^2).$$

223. Para resolver este problema se utiliza la tabla 1, n.° 1, hallando los valores de $\frac{dy}{dx}$ a la derecha de P_1 y a la izquierda de P_2 e igualando su suma a cero, es decir, hallando la abscisa correspondiente a la tangente horizontal de la línea elástica. Así se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1} + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_2} = 0.$$

Esto nos da para la sección buscada x la ecuación

$$3x^2(P_1a_1 - P_2b_2) - 6P_1l\,a_1x + P_1a_1(2l^2 + a_1^2) + P_2b_2(l^2 - b_2^2) = 0;$$

y con los valores numéricos dados resulta

$$x = 1{,}621 \text{ m}.$$

224. Sustituyendo en la solución del problema anterior $x = l/2$, resulta de la ecuación de x la relación que se busca

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{b_2(l^2 - 4b_2^2)}{a_1(l^2 - 4a_1^2)}.$$

La flecha en el punto medio de la viga se obtiene por medio de la tabla 1, número 1, sustituyendo primeramente P por P_1, a por a_1 y después P por P_2 y b por b_2; en ambas ecuaciones hay que hacer $x = l/2$ y sumar los resul-

tados. Teniendo en cuenta la relación hallada en el problema anterior, resulta

$$f_{máx} = \frac{P_2 a_1}{24 E J} \frac{4(l^2 - 2a_1^2)(l^2 - 2b_2^2) - l^4}{l^2 - 4b_2^2}.$$

Sustituyendo los valores correspondientes se halla

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{112}{125} \quad \text{y} \quad f_{máx} = \frac{37}{1344} \frac{P_1 l^3}{EJ}.$$

225. Aplicando la tabla 1, n.° 3, se halla sabiendo que $M_{máx} = \frac{ql^2}{8}$ y $f = \frac{5ql^4}{384EJ}$, el valor

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}}{W} = \frac{M_{máx} h}{2J} = \frac{24}{5} \frac{Eh}{l^2} f.$$

226. Sean a_1, b_1 las distancias a los apoyos de la fuerza P_1 en una de las vigas, y a_2, b_2 las de P_2 en la otra; se tiene

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2.$$

Si f_1, f_2 son las flechas máximas de ambas vigas, tendremos, según la tabla 1, n.° 1,

$$f_1 : f_2 = \frac{P_1 l_1^3}{J_1} : \frac{P_2 l_2^3}{J_2}. \qquad \text{(a)}$$

El máximo momento flector de una de las vigas es

$$M_1 = \frac{P_1 a_1 b_1}{l_1} = 2\sigma_1 \frac{J_1}{h_1},$$

siendo σ_1 la máxima tensión, y h_1 la altura de la viga.

Para las dos vigas se tiene la relación

$$M_1 : M_2 = P_1 l_1 : P_2 l_2 = \frac{J_1}{h_1} : \frac{J_2}{h_2}. \qquad \text{(b)}$$

Combinando las igualdades (a) y (b) se tiene

$$f_1 : f_2 = \frac{l_1^2}{h_1} : \frac{l_2^2}{h_2}.$$

(Ley de semejanza para las tensiones máximas iguales.)

227. El coeficiente de trabajo por flexión debe ser

$$k_b' = \frac{1}{11} 670 \text{ at.} = 61 \text{ at.}$$

Según la tabla 1, n.° 1, el máximo momento flector de la viga vale

$$800 \frac{100 \cdot 300}{400} = k_b W,$$

y siendo

$$W = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} \frac{5h}{7} h^2 = \frac{5}{42} h^3,$$

resulta

$$h = 20{,}3 \text{ cm.}, \qquad b = 14{,}5 \text{ cm.}$$

De aquí se deduce

$$J = \frac{1}{12} b h^3 = 10\,108 \text{ cm.}^4$$

Para las inclinaciones de la línea elástica en A y B tendremos

$$\psi_A = 0^\circ\, 18'\, 36'', \qquad \psi_B = 0^\circ\, 13'\, 17'',$$

la flecha bajo la carga será

$$f = 0{,}464 \text{ cm.}$$

y la máxima flecha

$$f_{\text{máx}} = 0{,}576 \text{ cm.},$$

a la distancia $l - x' = 1{,}764$ m. del apoyo A.

228. Reacciones de los apoyos;

$$A = \frac{qa}{2l}(2l - a), \qquad B = \frac{a^2 q}{2l}.$$

Las ecuaciones de las líneas elásticas de los trozos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ se hallan como en el problema 206: (a), (b), (c), (d).

En el límite C, es decir, para $x = a$, $x_1 = l - a$, deben cumplirse las condiciones siguientes:

$$\frac{dy}{dx} \text{ de la ec. (a)} = -\frac{dy_1}{dx_1} \text{ de la ec. (c).}$$

$$y \text{ de la ec. (b)} = y_1 \quad \text{de la ec. (d).}$$

De aquí resulta primeramente la constante de la ec. (a)

$$C' = \frac{qa^2}{24EJl}(2l - a)^2,$$

y para la máxima flecha resulta de la misma ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{6}qx^3\right) + C' = 0.$$

Haciendo $x/l = \xi$, $a/l = \alpha$ se deduce para ξ la ecuación

$$4\xi^3 - 6\alpha(2 - \alpha)\xi^2 + \alpha^2(2 - \alpha)^2 = 0. \qquad \text{(e)}$$

La raíz utilizable ξ_1 de esta ecuación da la abscisa $x_1 = l\xi_1$ correspondiente a la máxima flecha. El valor de ésta se deduce de la ec. (b)

$$f_{\text{máx}} = C'x_1 - \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{6}Ax_1^3 - \frac{1}{24}qx^4\right)$$

o

$$f_{\text{máx}} = \frac{ql^4\xi_1}{24EJ}\left[\alpha^2(2 - \alpha)^2 - 2\alpha(2 - \alpha)\xi_1^2 + \xi_1^3\right]$$

$$= \frac{ql^4\xi_1^3}{24EJ}\left[4\alpha(2 - \alpha) - 3\xi_1\right].$$

229. La máxima flecha corresponde al límite C de la carga, o sea cuando en el problema anterior $x = a$ ó $\xi = a$. La ec. (e) toma la forma

$$7a^2 - 12a + 4 = 0$$

y

$$a = 0{,}4531\, l.$$

230. Mientras $\overline{AC} = a$ es pequeño (menor que $0{,}4531\, l$, según el problema anterior), la máxima flecha corresponde al trozo $\overline{CB}$.

Haciendo uso de las ecuaciones (a), (b), (c), (d) del problema **206** para las líneas elásticas de los dos trozos, y determinando la constante C_1 del mismo modo que se determinó la constante C' en el problema **228**, se tiene

$$C_1 = \frac{qa^2}{24\,EJl}(2l^2 - a^2).$$

Haciendo en el trozo $\overline{CB}$: $\frac{dy_1}{dx_1} = 0$ se tiene, según la ec. (c) del problema **206**,

$$x_1 = \sqrt{(2l^2 - a^2)/6}$$

para la abscisa de la máxima flecha (contada desde B), y según la ec. (d) su valor es

$$f_{\text{máx}} = \frac{qa^2(2l^2 - a^2)}{36\,EJl}\sqrt{\frac{2l^2 - a^2}{6}}.$$

Para $a = 0$, $x_1 = l/\sqrt{3} = l - x$ y, por lo tanto,

$$x = 0{,}4226\, l,$$

siendo esta la posición extrema de la izquierda, de las flechas máximas.

Para $a = x = 0{,}4531\, l$, la máxima flecha, según el problema **229**, corresponde al punto C.

Para $a = l$, $x = l/2$ será la posición extrema de la derecha, de las flechas máximas. Por lo tanto, las flechas máximas se mueven dentro del segmento comprendido entre

$$x = 0{,}4226\, l \quad \text{y} \quad x = 0{,}5\, l.$$

231. En todos los puntos del tramo medio, el momento flector es constante y vale

$$M = -Pa,$$

la ecuación de la elástica es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$$

e integrando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Pa}{EJ}\left(\frac{l}{2} - x\right), \qquad \text{(a)}$$

habiéndose determinado la constante de integración por la condición de que la viga sea horizontal en su punto medio.

Efectuando la segunda integración tendremos

$$y = -\frac{Pa}{2EJ}(lx - x^2),$$

y para $x = l/2$ la flecha en el punto medio

$$f = -\frac{Pal^2}{8EJ}.$$

La inclinación de la viga en A se obtiene, prescindiendo del signo, haciendo $x = 0$ en la ec. (a)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Pal}{2EJ},$$

y la flecha en C será, según la tabla 1, n.° 1,

$$f_1 = \frac{Pa^3}{3EJ} + a \operatorname{tg} \alpha.$$

Sustituyendo $$f_1 = -f,$$

se deduce para $a/l = z$ la ecuación

$$8z^3 + 12z = 3,$$

de donde

$$a = lz = 0{,}218\, l.$$

282. El momento flector en el tramo medio $\overline{AB}$ es (prescindiendo del signo) Pa; por lo tanto, el radio de curvatura de la línea elástica, o sea $\varrho = \frac{EJ}{Pa}$, es también constante, es decir que la línea elástica es un arco de circunferencia. La flecha f en el punto medio (prescindiendo del signo) satisface a la ecuación

$$f(2\varrho - f) = l^2/4,$$

de donde

$$f = \varrho - \sqrt{\varrho^2 - l^2/4}$$

o bien, tomando sólo los tres primeros términos del desarrollo de la raíz por la fórmula del binomio

$$f = \varrho - \varrho\left(1 - \frac{l^2}{8\varrho^2} - \frac{l^4}{128\varrho^4}\right)$$

o

$$f = \frac{Pal^2}{8EJ}\left[1 + \frac{P^2a^2l^2}{16E^2J^2}\right]$$

en lugar de $f = Pal^2/8EJ$ del problema anterior.

288. Siendo $A = ql/2$ la reacción del apoyo, el momento flector en el tramo medio, a la distancia x del extremo de la viga será

$$M = A\left(x - \frac{l - z}{2}\right) - \frac{1}{2}qx^2.$$

Integrando la ecuación de la elástica

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$$

se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q}{EJ}\left[\frac{1}{4}lx^2 - \frac{1}{4}lx(l - z) - \frac{1}{6}x^3\right] + C.$$

Para $x = l/2$, y también para $x = (l - z)/2$, la tangente a la línea elástica es horizontal y, por lo tanto, $\frac{dy}{dx} = 0$; luego, para determinar z podremos emplear la ecuación

$$z^3 - 6lz^2 + 3l^2z = 0,$$

de donde

$$z = 0 \qquad \text{y} \qquad z = (3 - \sqrt{6})\, l = 0{,}550\, l.$$

284. La reacción del apoyo A es $A = Q/2 - P$, y el momento flector para la abscisa x contada desde A es

$$M = Ax - Qx^2/2l.$$

La ecuación de la línea elástica es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{1}{EJ}\left(Ax - \frac{Qx^2}{2l}\right),$$

la cual integrada da

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}Ax^2 - \frac{Qx^3}{6l}\right) + C',$$

$$y = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{6}Ax^3 - \frac{Qx^4}{24l}\right) + C'x.$$

Para $x = l$, $y = 0$, de donde sale C'. La inclinación de la viga en B es

$$\operatorname{tg}\psi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{l^3}{EJ}\left(\frac{P}{3} - \frac{Q}{24}\right).$$

La flecha en C es, según la tabla 1, n.° 4,

$$f = Pl^3/3EJ + l\operatorname{tg}\psi = 0,$$

cuando la relación buscada Q/P tiene el valor

$$Q/P = 16.$$

285. La ecuación de la línea elástica en el tramo $\overline{AB}$ es, contando las abscisas x a partir de A hacia la derecha,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{1}{EJ}\left(Ax - \frac{1}{2}qx^2\right).$$

Integrando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{6}qx^3\right) + C' \qquad \text{(a)}$$

o

$$y = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{6}Ax^3 - \frac{1}{24}qx^4\right) + C'x + D.$$

Para $x = 0$ y $x = l_1$ se tiene $y = 0$, de donde resulta

$$C' = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{6}Al_1^2 - \frac{1}{24}ql_1^3\right), \qquad D = 0,$$

y la ecuación de la línea elástica en el trozo $\overline{AB}$ es

$$y = \frac{x}{6EJ}\left[A(l_1^2 - x^2) - \frac{q}{4}(l_1^3 - x^3)\right].$$

Para el tramo $\overline{BC}$, el momento flector, contando las abscisas x_1 desde C hacia la izquierda, es

$$M = -qx_1^2/2,$$

y la ecuación de la línea elástica

$$\frac{d^2y}{dx_1^2} = \frac{qx_1^2}{2EJ},$$

integrando resulta

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{qx_1^3}{6EJ} + C_1, \qquad \text{(c)}$$

$$y = \frac{qx_1^4}{24EJ} + C_1x_1 + D_1;$$

para

$$x_1 = a \quad \text{es} \quad y = 0,$$

de donde

$$y = -\frac{q}{24EJ}(a^4 - x_1^4) - C_1(a_1 - x_1).$$

Para determinar la constante C_1 sustitúyase en el punto B para

$$x = l_1,\ x_1 = a: \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(l - x_1)} = -\frac{dy}{dx_1};$$

las ec. (a) y (c) nos dan la relación

$$-\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}Al_1^2 - \frac{1}{6}ql_1^3\right) + C' = -\frac{qa^3}{6EJ} - C_1,$$

de donde

$$C_1 = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{3}Al_1^2 - \frac{1}{8}ql_1^3 - \frac{1}{6}qa^3\right),$$

y la ecuación de la elástica en el trozo $\overline{BC}$ es

$$y = -\frac{q}{24EJ}(a^4 - x_1^4) - \frac{1}{EJ}(a - x_1)\left[q\left(\frac{l_1^2}{8} + \frac{a^2}{6}\right) - \frac{1}{3}Al_1^2\right]. \qquad \text{(d)}$$

236. La elevación de la viga en el extremo C se obtiene por medio de la ec. (d) de la línea elástica del problema anterior, haciendo $x_1 = 0$. Haciendo luego $a = l - l_1 = l(1 - 1/\sqrt{2})$, se tiene la flecha de la viga en C

$$f = -\frac{17\sqrt{2} - 24}{96}\frac{ql^4}{EJ} = -0{,}000\,431\frac{ql^4}{EJ},$$

y con los valores dados

$$f = -0{,}025 \text{ cm}.$$

237. Como a lo largo de los montantes no actúa momento alguno, dichos montantes permanecen rectos. El desplazamiento de D es la suma de los ángulos de flexión en B y C multiplicados por h, esto es, según la tabla 1, número 1,

$$f_D = (\varphi_B + \varphi_C)h = \left[\frac{Pab(l + b)}{6EJ_2l} + \frac{Pab(l + a)}{6EJ_2l}\right]h = \frac{Pabh}{2EJ_2}.$$

238. La componente horizontal de la reacción de la articulación A vale

$$Q = qh.$$

El desplazamiento de D se compone:

1.° Del desplazamiento horizontal f_1 de A respecto a B por efecto de las cargas horizontales Q en A y qh en el montante (tabla 1, núms. 4 y 6), siendo

$$f_1 = \frac{Qh^3}{3EJ_1} - \frac{qh^4}{8EJ_1} = \frac{5qh^4}{24EJ_1}, \text{ y}$$

2.° De los desplazamientos que resultan multiplicando por h las variaciones de ángulo en los puntos B y C de la viga por efecto del momento en B, $M_B = Qh - \frac{qh^2}{2} = \frac{qh^2}{2}$ (tabla 1, n.° 2 a)

$$f_2 = (\psi_B + \psi_C)\, h = \left(\frac{M_B l}{6EJ_2} + \frac{M_B l}{3EJ_2}\right) h = \frac{M_B l h}{2EJ_2} = \frac{qh^2 l}{4EJ_2}.$$

Por lo tanto,

$$f_D = f_1 + f_2 = \frac{qh^2 l}{24EJ_2}\left(5\frac{J_2 h}{J_1 l} + 6\right).$$

---

239. Contando las abscisas x a partir del extremo libre, se tiene, según la tabla 1, n.° 6,

$$M = Qx^2/2l, \quad e = x/2, \quad J = bx^3/12.$$

La fórmula (43) da la ley de variación de z:

$$z = \frac{h}{l}\, x, \quad \text{siendo} \quad h = \sqrt{\frac{3Ql}{bk_b}}.$$

240. Se hace el cálculo como antes y se obtiene

$$y = \frac{b}{l^2}\, x^2, \quad \text{en que} \quad b = \frac{3Ql}{h^2 k_b}.$$

241. Se hace el cálculo como antes. Hay que sustituir

$$M = Px, \quad e = z/2, \quad J = yz^3/12,$$

siendo

$$y : z = b : h,$$

de lo cual resulta

$$y^3 = b^3 x/l, \quad z^3 = h^3 x/l.$$

242. Sea P la fuerza que actúa en el extremo, y z la altura variable de la viga a la distancia x del empotramiento; para que sea de igual resistencia a la flexión tendremos

$$z^3 = h^3\, \frac{(l - x)}{l},$$

siendo h la altura en la sección de empotramiento.

La ecuación de la línea elástica es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ},$$

en donde

$$M = -P(l - x), \quad J = \frac{1}{12}\, bz^3 = \frac{bh^3}{12}\sqrt{\left(\frac{l - x}{l}\right)^3}.$$

Haciendo $l - x = u$ y $\frac{12 P l^{3/2}}{E b h^3} = a$, la ecuación diferencial toma la forma

$$\frac{d^2 y}{d u^2} = \frac{a}{\sqrt{u}}.$$

La primera integración da

$$\frac{d y}{d u} = 2a\,(\sqrt{u} - \sqrt{l}),$$

teniendo en cuenta que $\frac{dy}{du} = 0$ para $x = 0$, resulta $u = l$; la segunda integración da la ecuación

$$y = \frac{2}{3}\, a\,(l^{3/2} - 3\sqrt{l}\,u + 2u^{3/2}),$$

observando que $y = 0$ para $x = 0$, $u = l$.

Finalmente, se halla

$$y = \frac{8 P l^3}{E b h^3}\left[\frac{3x}{l} + 2\sqrt{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^3} - 2\right]$$

para la ecuación buscada de la elástica.

248. La forma de igual resistencia debe determinarse separadamente para cada trozo de la viga.

Momento de empotramiento en el trozo $\overline{AC}$: $M_A = Pl/2 + 3Ql/4$.

Reacción del apoyo: $A = P + Q$.

Momento flector a la distancia x de A:

$$M = -M_A + Ax.$$

Sustituyendo, según la fórmula (43), $Me = k_b J$, y siendo

$$e = h/2, \quad J = zh^3/12,$$

resulta

$$z = \frac{6}{k_b h^2}\,(-M_A + Ax),$$

y para la sección de empotramiento ($x = 0$)

$$b = \frac{6}{k_b h^2}\,(-M_A),$$

de donde resulta para la forma de igual resistencia en el trozo $\overline{AC}$

$$z = b\left[1 - \frac{4P + 4Q}{2P + 3Q}\,\frac{x}{l}\right].$$

En el punto medio de la viga la anchura necesaria será

$$b_1 = b\,\frac{Q}{2P + 3Q}.$$

Trozo $\overline{CB}$: el momento flector es (prescindiendo del signo)

$$M = \frac{Q}{l}(l-x)^2,$$

de donde se halla, de la misma manera que para el trozo anterior, la forma de igual resistencia

$$z = \frac{6Q}{k_b l h^2}(l-x)^2.$$

Para el punto medio, la anchura es

$$b_1 = \frac{6Q}{k_b l h^2}\frac{l^2}{4},$$

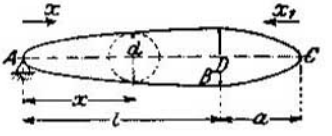
y utilizando el valor de b_1

$$z = 4b\frac{Q}{2P+3Q}\left(1-\frac{x}{l}\right)^2.$$

244. Para la sección x y la sección B tenemos la expresión

$$k_b' = \frac{M}{W} = \frac{Pax/l}{\pi d^3/32} = \frac{Pa}{\pi D^3/32}.$$

De la cual resulta



$$D^3 = \frac{32Pa}{\pi k_b}$$

y

$$d^3 = D^3 x/l.$$

Del mismo modo para a sección x_1 y B

$$k_b' = \frac{Px_1}{\pi d^3/32} = \frac{Pa}{\pi D^3/32},$$

y, por lo tanto,

$$d^3 = D^3 x_1/a.$$

245. Sea q la ordenada de la línea de carga a la distancia ξ de A; tendremos:

$$q = 2Q(l-\xi)/l^2,$$

y el momento flector en x

$$M = Ax - \int_0^x q(x-\xi)\,d\xi.$$

Haciendo $A = 2Q/3$ se tiene $M = \frac{Qx}{3}\left[2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right]$.

Sustituyendo en la fórmula (43)

$$e = y/2, \quad J = y^4/12,$$

se halla para el lado y variable

$$y^3 = \frac{2Q}{k_b}x\left(2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Para la sección peligrosa de la viga resulta $y_{máx} = h$.

Haciendo $\frac{dy}{dx} = 0$, tendremos para la sección peligrosa

$$x_1 = l\,(1 - 1/\sqrt{3}).$$

y sustituyendo en la ecuación anterior

$$h^2 = \frac{4}{3\sqrt{3}}\,\frac{Ql}{k_b},$$

de donde, finalmente, resulta

$$\left(\frac{y}{h}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{x}{l}\left(2 - 3\,\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right).$$

246. Se calcula primeramente el diámetro variable δ como función de x (distancia al apoyo) y se obtiene aplicando la fórmula (43)

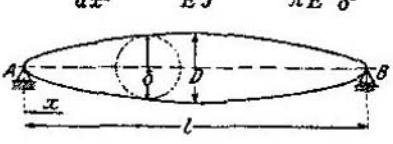
$$\delta^3 = \frac{16P}{\pi k_b'}\,x = ax, \quad \text{haciendo} \quad \frac{16P}{\pi k_b'} = a.$$

La ecuación es válida desde $x = 0$ hasta $x = l/2$; la otra mitad de la viga es simétrica. Para el punto medio de la viga el diámetro es

$$D^3 = \frac{8Pl}{\pi k_b}.$$

La ecuación de la línea elástica es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{32P}{\pi E}\,\frac{x}{\delta^4} = -\frac{bx}{\delta^4}, \quad \text{haciendo} \quad \frac{32P}{\pi E} = b;$$



o

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{3b}{a^3}\,\delta d\delta.$$

Integrando resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3b}{2a^3}\,(D^2 - \delta^2),$$

y volviendo a integrar

$$y = \frac{9b}{2a^3}\left(\frac{1}{3}\,D^2\delta^2 - \frac{1}{5}\,\delta^5\right).$$

De aquí resulta que la flecha en el punto medio es

$$f = \frac{3b}{5a^3}\,D^5,$$

y sustituyendo el valor de las constantes a y b

$$f = \frac{3}{80}\,\frac{Pl^3}{EJ_1},$$

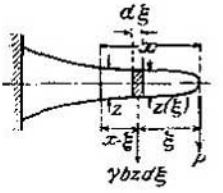
en donde $J_1 = \pi D^4/64$ es el m. de i. de la sección en el punto medio.

247. Consideremos el trozo de viga situado a la derecha de la sección x; para dicho trozo la ecuación general de la flexión

$$k'_b W = M$$

toma la forma

$$k'_b \frac{1}{6} b z^2 = Px + \int_0^x \gamma b z(\xi)(x - \xi) d\xi,$$



esto es, una ecuación integral de la que se deduce $z = z(x)$, que dará la forma buscada.

Esta ecuación diferenciada da

$$\frac{1}{6} k'_b \frac{dz^2}{dx} = P + \gamma b \int_0^x z(\xi) d\xi,$$

y diferenciando de nuevo

$$\frac{k'_b}{6\gamma} \frac{d^2 z^2}{dx^2} = z,$$

que es la ecuación diferencial buscada.

Tomando $z^2 = u$ como variable independiente y x como función, puede integrarse por cuadraturas.

---

248. Según la fórmula (48), $Q = \frac{3}{4} F \tau_{máx}$

o bien

$$Q = \frac{3}{4} \frac{\pi d^2}{4} k_s = 32987 \text{ kg}.$$

249. Según el resultado del problema 58, para el acero semiduro y el régimen de tensiones $n = -1$, la carga de fatiga es $A = 1540$ at., y el coeficiente de trabajo por tracción será

$$k'_z = 2A/7 = 440 \text{ at.},$$

de donde, aplicando la fórmula (50), se deduce la carga tangencial admisible

$$k'_s = k'_z \frac{m}{m+1} = 340 \text{ at.}$$

250. Según los resultados del problema 58, para el hierro dulce con una carga estática y un régimen de tensiones $n = 1$, la carga de fatiga es $A = 3640$ at.; por lo tanto, el coeficiente de trabajo admisible por tracción será

$$k'_z = 2A/7 = 1040 \text{ at.}$$

y por esfuerzo cortante, según la fórmula (52)

$$k'_s = \frac{10}{13} k'_z = 800 \text{ at.}$$

Escribiendo, de acuerdo con la fórmula (48),

$$k'_s = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}, \quad F = \frac{\pi d^2}{4}, \quad Q = 40\,000 \text{ kg.},$$

tendremos

$$d = 9{,}2 \text{ cm.}$$

251. Según la fórmula (47), tendremos

$$\tau_{máx} = K_s = \frac{3}{2}\frac{Q}{F},$$

y como $F = 20 \cdot 30 = 600$ cm.², resulta $Q = 30$ t.

252. El coeficiente de trabajo admisible para la fundición trabajando por tracción es en este caso $k'_t = 1250/8 = 156$ at., y el admisible, trabajando por esfuerzo cortante, según la fórmula (52) será $k'_s = \frac{10}{13}k'_t =$ 120 at. Utilizando ahora la fórmula (47), tendremos

$$\tau_{máx} = k'_s = \frac{3}{2}\frac{80\,000}{40\,b},$$

de donde

$$b = ,25 \text{ cm.}$$

253. Bajo la acción de la carga dada tienden a cortarse las superficies laterales ax y la base bx; la fuerza que actúa es

$$Q = P \cos \alpha.$$

Se tiene, según la fórmula (47),

$$k'_s = \frac{3}{2}\frac{P \cos \alpha}{x\,(2a + b)},$$

de donde

$$x = \frac{2}{3}\frac{P \cos \alpha}{k'_s\,(2a + b)} = 31 \text{ cm.}$$

254. El perno está sometido a tracción. Su sección (teniendo en cuenta la disminución debida a la entalla) vendrá dada por la expresión

$$P = (\pi d^2/4 - d \cdot \delta)\,k' = 13\,635 \text{ kg.}$$

La chaveta está sometida al esfuerzo cortante en dos secciones. Estas son distintas, pero, sin embargo, por aproximación supondremos que cada una vale $x\delta$. Teniendo en cuenta la fórmula (47), podremos escribir

$$k'_s = \frac{3}{2}\frac{P}{2x\delta},$$

de donde

$$x = \frac{3P}{4\delta \cdot k'_s} = 11 \text{ cm.}$$

Finalmente, el perno está sometido, en su extremo inferior, a esfuerzo cortante en las dos secciones que se proyectan en $ABCD$; tendremos, pues, como antes

$$k'_s = \frac{3}{2}\frac{P}{2yd},$$

sustituyendo, por aproximación, el trapecio $ABCD$ por el rectángulo yd. De esta manera resulta

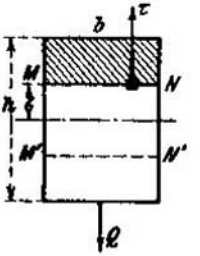
$$y = \frac{3P}{4dk'_s} = 2{,}6 \text{ cm.}$$

255. Aplicando las fórmulas (44) y (45), tendremos para el rectángulo

$$\varphi = 0, \quad S = \frac{b}{2}(h^2/4 - z^2), \quad J = bh^3/12, \quad 2y_1 = b,$$

y

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right).$$



Igualando esto a Q/bh, resulta

$$z = \pm h/\sqrt{12}.$$

En todos los puntos de las fibras $\overline{MN}$ y $\overline{M'N'}$ a la distancia z del c. d. g. la tensión tangencial valdrá Q/bh.

256. $\tau_{máx}$ es constante para cualquier relación entre los ejes, y vale $4Q/3F$.

257. Se utilizan las fórmulas (44) y (48).

Para la circunferencia se tiene:

$$S = \overline{MN}^3/12 = 2y_1^3/3, \quad \tau_z = Qy_1^2/3J;$$

además,

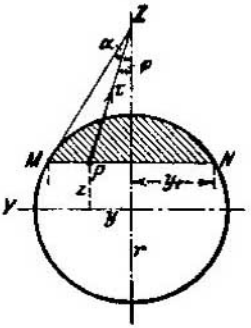
$$\operatorname{tg}\varphi : \operatorname{tg}\alpha = y : y_1, \quad \operatorname{tg}\alpha = z/y_1,$$

de donde

$$\operatorname{tg}\varphi = yz/y_1^2,$$

y

$$\tau = \frac{\tau_z}{\cos\varphi} = \frac{Q}{3J}\sqrt{y_1^4 + y^2z^2}.$$



Igualando esta expresión [según la fórmula (48)] a

$$\frac{1}{n}\tau_{máx} = \frac{1}{n}\frac{4}{3}\frac{Q}{F},$$

se halla para el lugar de los puntos P la ecuación

$$z^2(2r^2 - z^2 - y^2) = r^4(1 - 1/n^2).$$

258. Se aplica la fórmula (44) a la horizontal que pasa por el c. d. g. como fibra $\overline{MN}$, y se tiene

$$S = 12 \cdot 14{,}7 - 11 \cdot 12{,}5 \cdot 6{,}25 = 316{,}625 \text{ cm.}^3;$$

además,

$$J = 7629 \text{ cm.}^4, \quad 2y_1 = 1 \text{ cm.}$$

El coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante es, según la fórmula (52),

$$k_s' = \frac{10}{13}\,1000 = 770 \text{ at.}$$

Por lo tanto,

$$\tau_{máx} = k_s' = \frac{QS}{2y_1J} \quad \text{y} \quad Q = 18\,553 \text{ kg.}$$

259. Tomando en cualesquiera de los dos rectángulos una fibra $\overline{MN}$ a la distancia z del eje de las y, la tensión correspondiente según la fórmula (44) será

$$\tau = \frac{QS}{2y_1J},$$

en donde

$$S = b\,(4h^2 - z^2)/2, \quad 2y_1 = b,$$

y, por lo tanto,

$$\tau = Q\,(4h^2 - z^2)/2J.$$

Esta tensión es máxima para $z = h$, es decir, para el borde interior de los rectángulos, y vale

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{Qh^2}{J} = \frac{9}{28}\frac{Q}{bh}.$$

260. Aplicando la fórmula (44) se tiene

$$S = 8r^3 - \frac{1}{2}r^2\pi\frac{4r}{3\pi} = \frac{22}{3}r^3,$$

$$J = \left(\frac{63}{3} - \frac{\pi}{4}\right)r^4 = 20{,}5479\,r^4.$$

En vez de $2y$, hay que sustituir en la fórmula (44) el valor $2\overline{AB} = 2r$, y se tiene

$$\tau = 0{,}1784\,Q/r^2.$$

261. Las tensiones máximas tienen lugar en la sección normal a Q que pasa por el c. d. g. Para dicha sección tendremos

$$S = (BH^2 - bh^2)/8 = BH^2(1 - n^2)/8,$$

$$2y_1 = B - b = B\,(1 - n),$$

además, $$J = (BH^3 - bh^3)/12 = BH^3(1 - n^4)/12;$$

luego, según la fórmula (44),

$$\tau_{máx} = \frac{QS}{2y_1 J} = \frac{3}{2}\frac{Q\,(1 - n^2)}{BH\,(1 - n)\,(1 - n^4)}.$$

La sección es $F = BH - bh = BH\,(1 - n^2)$; y según la fórmula (49), la sección reducida valdrá

$$F_0 = \frac{2}{3}\frac{1 + n^2}{1 + n + n^2}F.$$

262. La tensión tangencial en la fibra AB vale, según la fórmula (47), $\tau = 3Q/2F$; ahora bien: Q es variable con la distancia x al punto de empotramiento, según la igualdad $Q = G\,(1 - x/l)$. La fuerza cortante total en la fibra AB valdrá, por lo tanto, desde A hasta C:

$$\int_0^a \tau\,b\,dx = \frac{3}{4}G\frac{a\,(2l - a)}{hl}.$$

El perno, según las fórmulas (48) y (49), puede resistir un esfuerzo cortante que vale

$$\frac{3}{4}\frac{\pi d^2}{4}k_s' = \frac{3\pi}{16}d^2\frac{10}{13}k_s'$$

Igualando ambas fuerzas, resulta

$$d^2 = \frac{26}{5\pi}\cdot\frac{G}{k_s'}\frac{a\,(2l - a)}{hl}.$$

263. La tensión en los bordes de una fibra cualquiera $\overline{MN}$ es, según las fórmulas (44) y (45),

$$\tau_1 = \frac{QS}{2y_1 J \cos\alpha},$$

en donde, siendo h la altura del triángulo

$$S = \frac{a}{9h}\left(\frac{2}{3}h - z\right)^2 (h + 3z);$$

además tenemos $2y_1 = \overline{MN} = \frac{a}{h}(2h/3 - z)$, $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$, $J = ah^3/36$, de donde la tensión en el contorno es

$$\tau_1 = \frac{2}{9\sqrt{3}}\frac{Q}{J}\left(\frac{2}{3}h^2 + hz - 3z^2\right).$$

Para $z = 0$ se tiene $\quad \tau_1 = \frac{32}{9}\frac{Q}{a^2}, \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

para la tensión en A y B.

Con la condición $\frac{d\tau_1}{dz} = 0$, resulta $z = \frac{h}{6}$ y se tiene $\tau_{1\,\text{máx}} = 4\frac{Q}{a^2}$, o sea que la máxima tensión en el contorno tiene lugar a la mitad de la altura del triángulo.

264. Como en el problema anterior, la tensión en el contorno es

$$\tau_1 = \frac{QS}{2y_1 J \cos\alpha},$$

siendo

$$S = (e - z)^2 (2z + e)/3,$$

$$2y_1 = \overline{MN} = 2(e - z),$$

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{2}, \quad J = a^4/12, \quad e = a/\sqrt{2},$$

de donde la tensión en el contorno para una ordenada z es

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{Q}{J}(e - z)(2z + e).$$

Haciendo $\frac{d\tau_1}{dz} = 0$, resulta $z = \frac{e}{4}$ y $\tau_{1\,\text{máx}} = \frac{9\sqrt{2}}{8}\frac{Q}{a^2}$. En los puntos A y B se tiene $z = 0$, y la tensión en el contorno es

$$\tau_1 = \sqrt{2}\,Q/a^2.$$

265. Se aplican las fórmulas (44) y (45), y se tiene

$$\tau_1 = \frac{QS}{2y_1 J \cos\alpha}.$$

Llamando f al área del segmento circular de $\overline{MN}$, y z_s la distancia de su c. d. g. s al c. d. g. S del semicírculo, el momento del área será

$$S = fz_s = f \cdot \overline{sO} - f \cdot \overline{SO}.$$

Por otra parte, siendo

$$f \cdot s\overline{O} = \overline{MN}^3/12,$$

$$f = \frac{1}{2}\left[r^2(\pi - 2\alpha) - \overline{MN} \cdot r \operatorname{sen}\alpha\right], \qquad \overline{MN} = 2r\cos\alpha,$$

y resulta

$$S = \frac{2r^3}{3}\left[\cos^3\alpha + \frac{2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{\pi} - 1\right],$$

y

$$\tau_1 = \frac{Qr^2}{3J}\left[\cos\alpha + \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\alpha - \frac{\pi - 2\alpha}{\pi\cos^2\alpha}\right].$$

Haciendo $\frac{d\tau_1}{d\alpha} = 0$, se obtiene para α la ecuación

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{cotg}\alpha + \frac{\pi}{4}\cos^2\alpha,$$

de donde sale, como solución aproximada, $\alpha = 37° 10'$, con lo cual se conoce el lugar de las tensiones del contorno τ_1.

Tenemos, además,

$$J = 2r^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) = 0{,}10974\, r^4$$

(véase problema 108); por lo tanto,

$$\tau_{1\,\text{máx}} = 1{,}0786\, Q/r^2.$$

266. La tensión en M ó N, que es la máxima de la fibra $\overline{MN}$, tendrá su valor máximo cuando en la fórmula (44) el cociente S/y_1 alcance su mayor valor, puesto que Q y J tienen para todos los puntos un valor constante. Se tiene

$$\frac{S}{y_1} = \frac{2}{3}\,\frac{2e^3 - 3z^2e + z^3}{2e - z},$$

siendo z la distancia de la fibra $\overline{MN}$ al eje de las y. Haciendo $\left(\frac{d}{dz}\frac{S}{y_1}\right) = 0$ y a continuación $z = e - u$, resulta la ecuación

$$2u^3 + 3eu^2 = 3e^3.$$

La relación u/e toma, según esto, el valor 0,806; por lo tanto, $z = 0{,}194\, e$ es la distancia al eje y de la fibra $\overline{MN}$ más cargada. Con este valor y aplicando las fórmulas (44) y (45) tendremos las tensiones del contorno en M y N

$$\tau_{\text{máx}} = 0{,}42\, Q/e^2$$

en que se ha puesto para el m. de i. de la sección el valor

$$J = \frac{5\sqrt{3}}{16}s^4 = \frac{5\sqrt{3}}{9}e^4.$$

267. Las caras laterales de la derecha de los anillos aprietan contra el cojinete de empuje. Debe verificarse, pues, la igualdad

$$P = k_d'\frac{\pi}{4}\left[(d + 2a)^2 - d^2\right] n,$$

de donde

$$d = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{P}{\pi k_d' n}}.$$

Las superficies interiores de los anillos están sometidas a la acción del esfuerzo cortante P. Por lo tanto,

$$P = k_s' d \pi b n,$$

de donde

$$b = \frac{P}{\pi k_s' n d},$$

268. a) Cálculo del esfuerzo cortante: $P = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi d^2}{4} k_s'$ [(según la fórmula (48)], de donde $d = 2{,}8$ cm.

b) Cálculo de la tracción: $P = b(b_1 - d) k_z'$; $b_1 = 8{,}3$ cm.

c) Cálculo de la tracción del hierro plano teniendo en cuenta el agujero del perno: $P = 2(\beta - d)\delta \cdot k_z'$, de donde $\beta = 5{,}3$ cm. Para el esfuerzo cortante en los dos extremos del fleje: $P = 2 \cdot \frac{2}{3}\beta\delta k_s'$; $\beta = 4{,}6$ cm.

d) Cálculo del esfuerzo cortante: $P = 2 \cdot \frac{2}{3} z \cdot b \cdot k_s'$ [según la fórmula (47)], de donde $z = 41$ cm.; del mismo modo $P = 4\,\frac{2}{3} \cdot z_1 \delta k_s'$, $z_1 = 2{,}3$ cm.

269. Del problema 58 se deduce que la carga de fatiga del acero dulce sometido a la carga variable supuesta, vale

$$A = 2400 - 1440 \cdot \frac{2}{5} + 360 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1882 \text{ at.}$$

La carga de trabajo que puede adoptarse es, para la tracción,

$$k_z' = 2A/7 = 538 \text{ at.},$$

y para el esfuerzo cortante,

$$k_s' = \frac{10}{13} k_s = 414 \text{ at.}$$

De $P = 20\,000 = 538\, ad$ se deduce

$$a = 9{,}3 \text{ cm.}$$

y de $P\sqrt{3}/3 = 11\,547 = 538\, bd$ se deduce

$$b = 5{,}4 \text{ cm.}$$

Dos secciones del perno resisten al esfuerzo cortante; según la fórmula (48), tendremos

$$\tau_{máx} = k_s' = 414 = \frac{4}{3}\,\frac{20\,000}{2\pi D^2/4},$$

de donde

$$D = 6{,}2 \text{ cm.}$$

La anchura β del anillo se calcula como en el problema anterior d). El cálculo por tracción se hará escribiendo la igualdad

$$P = 20\,000 = 2\beta d\, k_z',$$

de donde

$$\beta = 4{,}65 \text{ cm.}$$

El cálculo por esfuerzo cortante (véase la figura) da según la fórmula (47)

$$P = 2\frac{2}{3}x d k_s,$$

de donde

$$x = 9{,}1 \text{ cm}.$$

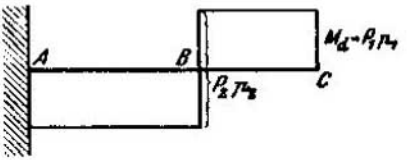
Ahora bien: de

$$\beta : x = x : (\beta + D)$$

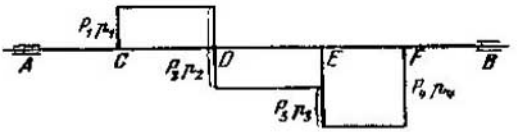
resulta la anchura del anillo

$$\beta = 6{,}5 \text{ cm}.$$

270.



271.



272. Según la fórmula (54), tendremos

$$d = 10{,}8 \text{ cm}.$$

El momento torsor es

$$M_t = 1860 \cdot 60 = 111\,600 \text{ cmkg}.$$

273. Según las fórmulas (53), (54) y (55), el ángulo de giro total será

$$\vartheta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\,\frac{2 l k_t}{G d}.$$

274. Según las fórmulas (53) y (63), se tiene

$$3^\circ = l\vartheta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\, l\bar{\vartheta} = \frac{180^\circ}{\pi}\,\frac{M_t}{\eta_1 b^2 h G}\, l,$$

de donde

$$l = 3{,}24 \text{ m}.$$

275. Según la fórmula (55), el ángulo de giro de una barra circular por unidad de longitud es

$$\vartheta = \frac{\tau_{máx}}{G r} = \frac{k_t}{G r}.$$

Haciendo $\vartheta l = \pi/2$, la relación buscada es

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4}\,\frac{G}{k_t} = 742.$$

276. Según las fórmulas (53) y (55), el ángulo total de giro vale

$$\varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\,\vartheta l = \frac{180^\circ}{\pi}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{M_t}{Gr^4}\,l,$$

en donde

$$M_t = W a\,.$$

De ahí se deduce

$$d = 4{,}92\,\sqrt[4]{\frac{W a l}{G\varphi}} = 7{,}8 \text{ cm.}$$

277. Según la fórmula (54), se tiene

$$M_t = Pa = \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^3 k_t,$$

de donde

$$P = 153{,}4 \text{ kg.}$$

278. Según la fórmula (54), se tiene

$$M_t = P\,(a + d/2) = \frac{\pi}{2}\,r^3 K_t,$$

de donde

$$P = 183{,}26 \text{ kg.}$$

Además, para la flexión de la barra de hierro

$$M = Pa = \frac{1}{6}\,d_1^3\,K_b, \quad \text{de donde} \quad P = 166{,}67 \text{ kg.}$$

La rotura de la barra se producirá antes que la del rollizo.

279. Según la fórmula (58), se tiene

$$M_t = \frac{\pi}{2}\,b^2 c\,K_d = \frac{\pi}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 \frac{8}{2}\,4000 = 1570{,}8 \text{ mkg.}$$

280. Según la fórmula (61), en el anillo elíptico se tiene

$$M_t = \frac{\pi}{2}\,b^2 c\,(1 - a^4)\,\tau_{máx}.$$

Haciendo $M_t = 2Pc$, $\tau_{máx} = k_t'$, se tiene

$$b = 2{,}8 \text{ cm.}$$

281. A cada mitad de la barra corresponde la mitad del momento de torsión. Para cada una de estas mitades, según la fórmula (62) y la tabla 3, tendremos para $b = h = x$

$$M_t = \frac{1}{2}\,P 2p = \eta_2 x^3 k_t, \qquad \eta_2 = 0{,}21,$$

de donde

$$x = 7{,}36 \text{ cm.}$$

Ahora bien: según las fórmulas (53) y (63), el ángulo de giro en la sección media será (puesto que $\eta_2/\eta_3 = 3/2$),

$$\vartheta^\circ\,\frac{l}{2} = \frac{\eta_2}{\eta_3}\,\frac{\tau_{máx}}{G}\,\frac{2}{x}\,\frac{l}{2}\,\frac{180^\circ}{\pi} = 0^\circ\,34'.$$

282. Aplicando las fórmulas (63) y (65) tendremos

$$\vartheta_1 = 7{,}2\,\frac{M_t}{G s^4}, \qquad \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}\,\frac{M_t}{G r^4},$$

siendo s el lado del cuadrado y r el radio del círculo. Por la igualdad de volúmenes de las barras tenemos $s^2 = r^2\pi$. De donde se deduce

$$\vartheta_1 : \vartheta_2 = 3{,}6 : \pi = 1{,}146.$$

283. Se aplica la fórmula (60).

En los extremos del eje mayor $2c$, la tensión debida a la torsión es $\frac{2}{\pi}\,\frac{M_t}{b c^2}$. Igualándola a τ de la fórmula (60) se tiene el lugar de los puntos de igual tensión

$$\frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{c^2},$$

esto es, una elipse cuyos semiejes son b^2/c y c.

284. Siendo $b < c$, la máxima tensión tiene lugar en el perímetro de la elipse (en los extremos del eje menor), y, según la fórmula (58), vale

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_t}{b^2 c},$$

y la mínima (en los extremos del eje mayor)

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_t}{b c^2}.$$

De la condición $\tau_{\text{máx}} : \tau_{\text{mín}} = n : 1$ resulta, finalmente,

$$b : c = 1 : n.$$

285. Sea P la fuerza tangencial y v la velocidad tangencial del árbol; la potencia que corresponde a la fuerza P es

$M_t\omega = Pr\omega = Pv = 75\,N$ mkg./sek ó $P\frac{rn\pi}{30} = 7500\,N$ cmkg./sek, de lo cual se deduce el momento torsor del árbol

$$M_t = Pr = \frac{225\,000}{\pi}\,\frac{N}{n}\ \text{cmkg.}, = 71\,620\,\frac{N}{n}\ \text{cmkg.},$$

y de la fórmula (54) se deduce

$$r^3 = \frac{450\,000}{\pi^2}\,\frac{N}{n k_t}, \qquad \text{y} \qquad r = 35{,}72\,\sqrt[3]{\frac{N}{n k_t}}.$$

286. Según la fórmula (58), tendremos para la elipse interior

$$M_t = \pi b_1^2 c_1 \tau_{\text{máx}}/2,$$

y según la fórmula (61), para el anillo elíptico

$$M_t = \pi b^2 c(1 - \alpha^4)\,\tau_{\text{máx}}/2.$$

Haciendo $\alpha = b_1/b = c_1/c$ se deduce igualando

$$\alpha^4 + \alpha^2 = 1,$$

cuya raíz utilizable es

$$\alpha = 0{,}819.$$

287. Se tiene, según la fórmula (56),

$$M_t = \frac{\pi}{2}\,\frac{R^4 - r^4}{R}\,k_t = \frac{\pi}{2}\,R^3\,(1 - \alpha^4)\,k_t,$$

en donde $\alpha = r/R$; además el peso del tubo es

$$G = \gamma \pi l (R^2 - r^2) = \gamma \pi l R^2 (1 - \alpha^2).$$

Poniendo

$$\frac{4\gamma^2 M_t^2 \pi l}{G k_t^2} = a \quad (\text{¡número abstracto!}),$$

se obtiene para α la ecuación

$$(1 + \alpha^2)^2 = a\,(1 - \alpha^2),$$

resultando para α el valor útil

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\sqrt{8\,a + a^2} - \frac{a}{2} - 1,$$

de donde

$$R = \sqrt{\frac{G}{\gamma \pi l (1 - \alpha^2)}} \quad \text{y} \quad r = \alpha R.$$

288. Al resolver el problema 285 se halló la igualdad

$$M_t = \frac{225\,000}{\pi}\,\frac{N}{n}\ \text{cmkg}.$$

Haciendo luego en la fórmula (62) $b = h = s$, puesto que el cuadrado es evidentemente la forma de rectángulo más favorable para resistir a la torsión, se tiene

$$M_t = 0{,}21\,s^3\,\tau_{\text{máx}}.$$

Siendo $s = d/\sqrt{2}$ y $\tau_{\text{máx}} = k_t$ se obtiene

$$N = \frac{0{,}21\,\pi n d^3 k_t}{2\sqrt{2}\cdot 225\,000} = 2{,}67\ \text{CV}.$$

289. Para todo el árbol se tiene, según la fórmula (54),

$$M_t = \frac{\pi}{2}\,r^3\,\tau_{\text{máx}}.$$

En un punto del interior, a la distancia ϱ del centro, la tensión es

$$\tau = \frac{\varrho}{r}\,\tau_{\text{máx}}.$$

El momento torsor que absorbe la parte interior del árbol de radio r_1 es

$$\int_0^{r_1} 2\pi \varrho \tau \varrho\, d\varrho.$$

Igualando a M_t/n, se deduce

$$\frac{1}{n}\,\frac{\pi}{2}\,r^3 \tau_{\text{máx}} = 2\pi\,\frac{\tau_{\text{máx}}}{r}\int_0^{r_1} \varrho^3\, d\varrho = 2\pi\,\frac{\tau_{\text{máx}}}{r}\,\frac{r_1^4}{4}.$$

de donde

$$r_1 = r/\sqrt[4]{n}.$$

290. A consecuencia de la flexión de la barra s^2 el punto A experimenta un descenso

$$f = \frac{1}{3}\,\frac{P(a - s/2)^3}{E\,J}, \qquad \left(\text{siendo } J = \frac{1}{12}\,s^4\right)$$

según la tabla 1, n.° 4.

A consecuencia del giro de la barra s^2 el punto A desciende una cantidad $\vartheta\, la$, en la cual, según la fórmula (63),

$$\vartheta = \frac{1}{\eta_2}\,\frac{M_t}{G s^4} = 7{,}2\,\frac{M_t}{G s^4}, \quad \text{siendo} \quad M_t = Pa.$$

De aquí resulta el ángulo buscado

$$a\varphi = \vartheta\, la$$

y

$$\varphi = \frac{2P}{E s^4}\left[9al - \frac{1250}{a}\left(a - \frac{s}{2}\right)^3\right].$$

El valor de

$$G = \frac{m}{2(m+1)}\,E = 0{,}4\,E$$

según la fórmula (14). No se ha tenido en cuenta el descenso de la barra de sección s^2.

291. La fuerza P produce en A una tensión normal

$$\sigma = \frac{P}{\pi r^2} = -397{,}88 \text{ at. (compresión).}$$

Por el momento de torsión M_t se produce [según la fórmula (54)] en el perímetro del gorrón una tensión tangencial $\frac{2}{\pi}\frac{M_t}{r^3}$; por lo tanto, en el punto A la carga debida a la torsión es

$$\tau = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_t}{r^3}\,\frac{\varrho}{r} = 397{,}88 \text{ at.}$$

Las tensiones principales en A son, pues,

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \tau^2} = 245{,}90 \text{ at. (tracción),}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \tau^2} = -643{,}79 \text{ at. (compresión),}$$

y sus direcciones,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2\tau/\sigma,$$

de donde

$$\alpha_1 = 58^\circ\, 16'\, 57'' \quad \text{y} \quad \alpha_2 = 90 - \alpha_1 = 31^\circ\, 43'\, 3''.$$

El plano de las tensiones principales σ_1, σ_2 pasa por A y es perpendicular a $\overline{AB} = \varrho$, y la mayor de las tensiones σ_2 forma con la vertical el ángulo α_2.

292. Cuando un árbol de transmisión transporta N CV. girando a n revoluciones por minuto, el momento de torsión, según el problema 285, es

$$M_t = 71\,620\,\frac{N}{n} \text{ cmkg.}$$

Según la fórmula (55), el ángulo de torsión o de giro por unidad de longitud axial es para la sección circular

$$\vartheta = \frac{2}{\pi}\frac{M_t}{Ga^4}.$$

Suponiendo fija la sección extrema D del árbol, el ángulo de giro en A debido a los N_1 CV. será

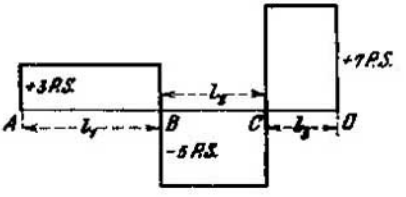
$$\frac{2}{\pi}\,71\,620\,\frac{N_1}{nGa^4}(l_1 + l_2 + l_3) = 45\,600\,\frac{N_1}{nGa^4}(l_1 + l_2 + l_3);$$

y del mismo modo el ángulo de giro por efecto de N_2 CV. en B

$$-45\,600\,\frac{N_2}{nGa^4}(l_2 + l_3)$$

y, finalmente, el ángulo de giro por efecto de N_3 CV. en C

$$45\,600\,\frac{N_3}{nGa^4}\,l_3;$$



el ángulo total de giro, es pues,

$$\varphi = \frac{45\,600}{nGa^4}\,[N_1 l_1 + (N_1 - N_2)\,l_2 + (N_1 - N_2 + N_3)\,l_3],$$

$$\varphi = \frac{78\,782\,000}{nGa^4}.$$

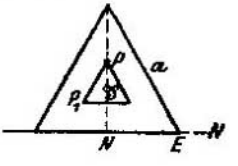
Para trazar el diagrama tenemos

$$N_1 = 3 \text{ CV.}, \qquad N_1 - N_2 = -5 \text{ CV.}, \qquad N_1 - N_2 + N_3 = 7 \text{ CV.}$$

---

293. Haciendo coincidir la línea neutra NN con un lado del triángulo, se tiene [véase la figura correspondiente a la fórmula (65)]

$$n = \overline{SN} = \sqrt{3}\,a/6;$$



el m. de i. para cualquier recta que pasa por S vale

$$J = \sqrt{3}\,a^4/96,$$

y, por lo tanto, el radio de giro será

$$i^2 = a^2/24,$$

y $\qquad p = \overline{SP} = i^2/n = \sqrt{3}\,a/12$ (prescindiendo del signo).

Al girar la línea neutra alrededor del vértice E, el punto de acción P recorre el segmento PP_1 paralelo a uno de los lados del triángulo.

El núcleo es un triángulo equilátero cuya área es 1/16 de la dada.

294. Sea D el diámetro exterior del anillo, y d el interior; el diámetro del núcleo será

$$p = \frac{i^2}{n} = \frac{(D^4 - d^4)\pi/64}{(D^2 - d^2)\pi/4}\,\frac{2}{D} = \frac{D^2 + d^2}{8D}.$$

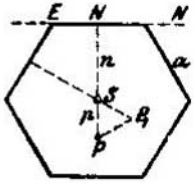
Igualando esta expresión a $d/2$, tendremos

$$D^2 + d^2 = 4\,Dd,$$

de donde resulta la raíz útil

$$d/D = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}27.$$

295. Suponiendo que la fibra neutra coincida con uno de los lados del hexágono, se tiene $n = a\sqrt{3}/2$; además, el m. de i. de la superficie respecto a cualquier recta que pasa por S es



$$J = 5\sqrt{3}\,a^4/16,$$

el área vale

$$F = 3\sqrt{3}\,a^2/2,$$

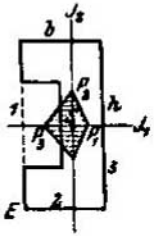
y, por lo tanto, el radio de giro

$$i^2 = 5a^2/24,$$

de donde (prescindiendo del signo)

$$p = 5\sqrt{3}\,a/36.$$

Al girar la línea neutra alrededor del vértice E, el punto de acción de la fuerza P recorre el segmento $\overline{PP_1}$. El núcleo es también un hexágono regular de centro S, siendo P y P_1 dos de sus vértices.



296. El c. d. g. está en el eje de simetría J_1 y dista $5b/12$ del lado derecho h. Los m. de i. de la superficie son

$$J_1 = \frac{5}{64}\,bh^3, \qquad J_2 = \frac{11}{192}\,b^3 h.$$

La línea circunscrita a la sección es el rectángulo bh. Los vértices del núcleo estarán, según la fórmula (65), a las siguientes distancias de S (prescindiendo del signo):

Fibra neutra 1: $n_1 = \frac{7}{12}\,b, \qquad p_1 = \overline{P_1S} = \frac{J_2}{Fn_1} = \frac{11}{84}\,b.$

Fibra neutra 2: $n_2 = \frac{1}{2}\,h, \qquad p_2 = \overline{P_2S} = \frac{J_1}{Fn_2} = \frac{5}{24}\,h.$

Fibra neutra 3: $n^3 = \frac{5}{12}\,b, \qquad p_3 = \overline{P_3S} = \frac{J^2}{Fn_3} = \frac{11}{60}\,b.$

Al girar la línea neutra alrededor del vértice E en el sentido de 1 hacia 2, el punto de aplicación de la fuerza recorre el segmento P_1P_2, etc.

297. Si la línea neutra coincide con el lado inferior b del rectángulo, se tiene, según la fórmula (65), $p_2 n_2 = -i_1^2$, siendo

$$p_2 = z, \qquad n_2 = h/2, \qquad i_1^2 = J_1/F.$$

Además, $J_1 = bh^3/12 - yz^3/3$ respecto al eje horizontal que pasa por el c. d. g., y la superficie vale

$$F = bh - 2\,yz,$$

de donde (prescindiendo del signo) y poniendo

$$y/b = \eta, \qquad z/h = \zeta,$$

resulta

$$6\zeta - 12\eta\zeta^2 = 1 - 4\eta\zeta^2;$$

y del mismo modo se obtiene para la posición de la fibra neutra n el lado h la ecuación

$$6\eta - 12\eta^2\zeta = 1 - 4\eta^2\zeta.$$

Una solución utilizable de estas ecuaciones es

$$\eta = \zeta, \qquad 4\eta^4 - 12\eta^3 + 6\eta - 1 = 0,$$

de donde

$$y = 0{,}177\, b, \qquad z = 0{,}177\, h.$$

298. El lugar buscado es el núcleo central de la sección. Se tiene

$$J = \frac{67}{192}a^4, \qquad F = \frac{7}{4}a^2, \qquad i^2 = \frac{J}{F} = \frac{67}{336}a^2.$$

Tomando la fibra neutra en $\overline{AB}$, su distancia a S es $n = a$, y, según la fórmula (65), la distancia del punto del núcleo es

$$p = \frac{67}{336}a, \text{ a la derecha de } S.$$

Si la fibra neutra es $\overline{BC}$, se tiene $n' = 5a/4\sqrt{2}$ para la distancia a S, y la del punto del núcleo es

$$p' = \frac{67\sqrt{2}}{420}a, \text{ en } \overline{SD}.$$

El núcleo es, pues, un octágono cuyos vértices distan alternativamente p y p' del punto S.

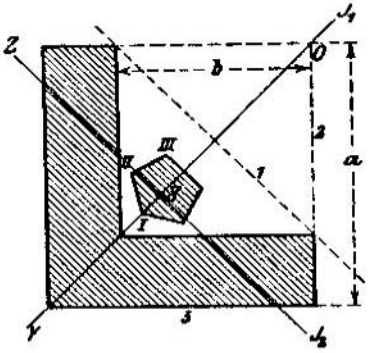
299. El c. d. g. S está en el eje de simetría a la distancia

$$\overline{OS} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}.$$

Los m. de i. principales son

$$J_1 = \frac{1}{12}(a^4 - b^4),$$

$$J_2 = \frac{7}{12}(a^4 - b^4) - \frac{1}{2}\frac{(a^3 - b^3)^2}{a^2 - b^2}.$$



De aquí resulta para las coordenadas de los vértices del núcleo:

I, correspondiendo a la fibra neutra 1

$$\overline{IS} = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{a^4 + 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 + b^4}{a^2(a + b)};$$

II, correspondiendo a la fibra neutra 2

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{7}{6}\frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3} + \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}\right],$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3};$$

III, correspondiendo a la fibra neutra 3

$$y_3 = \frac{\sqrt{2}}{12}\,\frac{a^4 + 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 + b^4}{(a^2 + ab - b^2)(a + b)};$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{12}\,\frac{(a^2 + b^2)(a + b)}{a^2 + ab - b^2}.$$

---

300. Efectuando el cálculo para 1 m. de longitud de muro, tendremos

$$P = \text{peso del muro} = \gamma_1 hx, \quad F = x;$$

la componente horizontal del empuje del agua sobre el muro es

$$D = \gamma h^2/2,$$

y su momento respecto a B,

$$M = Dh/3.$$

El momento resistente de la base $\overline{AB}$ para 1 m. de longitud es

$$W = x^2/6.$$

La fórmula (67) nos da en este caso

$$k_i' = -\frac{P}{F} + \frac{M}{W} = -\gamma_1 h - \gamma\frac{h^3}{x^2},$$

de donde

$$x = h\sqrt{\frac{\gamma h}{k_i + \gamma_1 h}}.$$

301. Siendo corto el perno $\overline{AB}$, pueden utilizarse las fórmulas (68).

La máxima compresión es $\dfrac{4P}{\pi d^2}\left(\dfrac{8a}{d} + 1\right)$,

y la máxima tracción, $\dfrac{4P}{\pi d^2}\left(\dfrac{8a}{d} - 1\right)$.

La flexión del perno se debe al momento Pa, que es igual para todas las secciones. Según la fórmula (40), la línea elástica es una circunferencia de radio $\varrho = EJ/Pa$, y la flecha es la de ese arco de circunferencia, en el que se verifica

$$(s/2)^2 = f(2\varrho - f),$$

o con aproximación suficiente

$$s^2 = 8f\varrho,$$

de donde

$$f = \frac{8Pas^2}{\pi E d^4}.$$

302. Haciendo en la fórmula (68)

$$\sigma = k_i', \qquad W \text{ (momento resistente)} = \pi D^3(1 - \delta^4)/32,$$

se deduce

$$p = \frac{D}{8}(1 + \delta^2)\left(\frac{k_i' F}{P} - 1\right).$$

303. Suponiendo que la resultante de P_1 y P_2 cae a la derecha del eje de la pieza, la carga de trabajo máxima será la del borde derecho, y valdrá, según la fórmula (68),

$$\sigma = k_z = \frac{P_2}{s^2}\left(1 - \frac{6b}{s}\right) + \frac{P_1}{s^2}\left(1 - \frac{6a}{s}\right).$$

Haciendo $P = P_1 + P_2$ se obtiene

$$P_1 = \frac{P(6b + s) - k_z' s^3}{6(a + b)},$$

$$P_2 = \frac{P(6a - s) + k_z' s^3}{6(a + b)}.$$

El valor máximo de P corresponde a la posición central de esta carga, o sea cuando vale $k_z' s^3$, y entonces se tiene

$$P_1 : P_2 = b : a.$$

304. Con una seguridad igual a cinco, la carga que produciría la rotura valdrá

$$B = 5 \cdot 800 \text{ kg.} = 4000 \text{ kg.}$$

El radio de giro de la sección es

$$i = 20/\sqrt{12} = 5{,}78 \text{ cm.} \quad \text{y} \quad \lambda = l/i = 69{,}28.$$

Para la madera se tiene, según la fórmula (74),

$$\mu = 0{,}70 + 0{,}03\lambda = 2{,}78.$$

Además, según la fórmula (73),

$$\omega l = l\sqrt{B/EJ} = 0{,}683,$$

y

$$1/\cos \omega l = 1{,}278.$$

La fórmula (72) da

$$p = 29{,}76 \text{ cm.},$$

de donde

$$x = p - 10 = 19{,}76 \text{ cm.}$$

Sin tener en cuenta el coeficiente μ de Tetmajer, se hubiese obtenido $x = 77{,}37$ cm.

305. Para calcular la carga de rotura B de la columna se utiliza la fórmula (72).

El radio de giro de la sección cuadrada es

$$i = s/\sqrt{12} = 8{,}66 \text{ cm.};$$

además,

$$\lambda = l/i = 46{,}2,$$

y el coeficiente de Tetmajer μ, según la fórmula (74),

$$\mu = 0{,}70 + 0{,}03\lambda = 2{,}086;$$

además

$$pF/W = 20, \qquad FK_d = 252\,000 \text{ kg.},$$

y, por lo tanto,

$$B = \frac{FK_d}{\mu\left[1 + \dfrac{pF}{W\cos\omega l}\right]} = \frac{120\,805}{1 + \dfrac{20}{\cos\omega l}}, \text{ con } \omega = \sqrt{\frac{B}{EJ}}.$$

1.ª aproximación:

$$1/\cos \omega l = 1, \qquad B_1 = 5752 \text{ kg.}$$

2.ª aproximación (según la fórmula 73):

$$(\omega l)^2 = 0{,}126, \qquad 1/\cos \omega l = 1{,}066, \qquad B_2 = 5412 \text{ kg.}$$

3.ª aproximación:

$$(\omega l)^2 = 0{,}119, \qquad 1/\cos \omega l = 1{,}062, \qquad B_3 = 5432 \text{ kg.}$$

Interrumpiendo aquí el cálculo, la resistencia buscada es

$$P = B_3/4 = 1358 \text{ kg.}$$

Con esta carga se tiene

$$(\omega l)^2 = P l^2/EJ = 0{,}030, \qquad 1/\cos \omega l = 1{,}015,$$

y según la fórmula (71) la flecha en el extremo superior

$$f = 0{,}015 \text{ m.}$$

Las cargas máximas en las fibras extremas de la sección inferior se calculan por las fórmulas (70)

a la derecha: $\dfrac{P}{F}\left(1 + \dfrac{pF}{W \cos \omega l}\right) = 32$ at. (compresión),

a la izquierda: $\dfrac{P}{F}\left(1 - \dfrac{pF}{W \cos \omega l}\right) = 29$ at. (tracción).

306. Se calcula primeramente la carga total de rotura por la fórm. (72)

$$B = \frac{F K_d}{\mu \left[1 + \dfrac{pF}{W \cos \omega l}\right]}.$$

F es la sección $= 224$ cm.²,

J (momento de inercia de la sección) $= 9138{,}67$ cm.⁴,

$$e_1 = e_2 = e = 15/\sqrt{2} + 2/\sqrt{2} = 12{,}02 \text{ cm.},$$

W (momento resistente) $= J/e = 760{,}29$ cm.³,

p (excentricidad de la carga) $= 15\sqrt{2} = 21{,}21$ cm.,

μ (coeficiente de Tetmajer para el acero dulce, sección compuesta de la figura) $= 1{,}23$ [según la fórmula (74)].

En vez de k_d hay que poner para el acero dulce la carga de aplastamiento 5 200 at.

De esta manera la ecuación anterior toma la forma

$$B = \frac{456\,297 \text{ kg.}}{1 + \dfrac{6{,}25}{\cos \omega l}}, \quad \text{siendo} \quad \omega = \sqrt{\frac{B}{EJ}}. \qquad \text{(a)}$$

Para calcular B se procede a efectuar las siguientes aproximaciones:

1.ª aproximación. Se pone $\dfrac{1}{\cos \omega l} = 1$, y resulta

$$B_1 = 62\,938 \text{ kg.}$$

2.ª aproximación. Este valor de B se obtiene con las ec. (a)

$$\omega l = 0{,}742,$$

y, además, por la fórmula (73)

$$\frac{1}{\cos \omega l} = 1 + \frac{(\omega l)^2}{2} + \frac{5\,(\omega l)^4}{24} = 1{,}338,$$

y

$$B_2 = 48\,737 \text{ kg}.$$

3.ª aproximación. La repetición de este procedimiento da

$$\omega l = 0{,}653, \qquad 1/\cos \omega l = 1{,}251, \qquad B_3 = 51\,741 \text{ kg}.$$

4.ª aproximación:

$$\omega l = 0{,}673, \qquad 1/\cos \omega l = 1{,}269, \qquad B_4 = 51\,090 \text{ kg}.$$

5.ª aproximación:

$$\omega l = 0{,}669, \qquad 1/\cos \omega l = 1{,}266, \qquad B_5 = 51\,215 \text{ kg}.$$

Interrumpiendo aquí el cálculo, resulta que la resistencia de la columna es

$$P = B_5/4 = 12\,804 \text{ kg}.$$

307. Se hace en la fórmula (68) $\sigma = 0$, de donde

$$p\,F = W.$$

Ahora bien:

$$W = J/e, \qquad p = a/2, \qquad F = ax + 4\,a^2,$$

$J = (ax^3 + 4\,a^4)/12$ respecto a la vertical que pasa por el c. d. g. de la sección y $e = x/2$. Haciendo $x/a = z$ resulta la ecuación

$$z^3 - 3\,z^2 - 12\,z + 4 = 0,$$

cuya raíz utilizable es $z = 5{,}17$.

308. La carga total P tiene la componente axial $P \operatorname{sen} \alpha$ y la normal $P \cos \alpha$; esta última produce en B una deformación que vale

$$f = \frac{1}{3}\,\frac{P l^3 \cos \alpha}{E J} = 3{,}068 \text{ cm}.$$

Debido a esta desviación, la presión $P \operatorname{sen} \alpha$ es excéntrica respecto al apoyo A, que es donde se producen las cargas máximas; según la fórmula (70), la del lado exterior es

$$\sigma_1 = -\frac{P \operatorname{sen} \alpha}{F}\left[1 - \frac{f\,F}{W \cos \omega l}\right] + \frac{P l \cos \alpha}{W},$$

y la del interior,

$$\sigma_2 = -\frac{P \operatorname{sen} \alpha}{F}\left[1 + \frac{f\,F}{W \cos \omega l}\right] - \frac{P l \cos \alpha}{W},$$

en donde

$$\omega = \sqrt{\frac{P \operatorname{sen} \alpha}{E J}}, \qquad W = \frac{J}{e} = \frac{16\,052}{15} = 1070 \text{ cm.}^3$$

Los primeros sumandos de las tensiones representan el efecto de la compresión excéntrica P sen α; los segundos, el del momento flector Pl cos α. De aquí resulta

$$\omega l = 0{,}2053 \text{ en radianes, es decir, } 11^\circ\ 45'\ 36'' \text{ en grados,}$$

y, además,

$$\sigma_1 = +745 \text{ at.}, \qquad \sigma_2 = -811 \text{ at.}$$

309. Según las fórmulas (70) y (73), se tiene

$$\omega = \sqrt{P/EJ} = 0{,}00261, \qquad \omega l = 1{,}175, \qquad 1/\cos \omega l = 2{,}086,$$

y

$$\sigma_{máx} = -1000 \text{ at.} = -\frac{10\,000}{20{,}4}\left[1 + \frac{p\ 20{,}4 \cdot 7{,}5}{735}\ 2{,}086\right],$$

de donde

$$p = 2{,}4 \text{ cm.}$$

La máxima tensión corresponde a A. La tensión en B es

$$\sigma_{mín} = 19{,}6 \text{ at. (tracción).}$$

310. Los puntos más cargados de la sección son alguno de los ABC y D. Introduciendo sus coordenadas y teniendo en cuenta los signos, en la fórmula (69), resulta

$$\sigma = P\left[\frac{1}{F} + \frac{by}{J_2} + \frac{cz}{J_1}\right].$$

Siendo $b = 15$ cm., $c = -50$ cm. (sentido del eje $-z$), se obtienen los cuatro valores

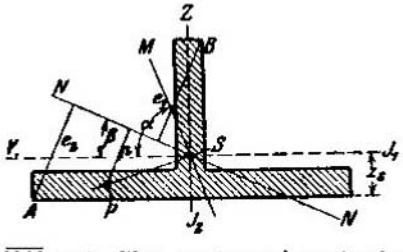
$$\sigma_A = 0{,}033\,87\ P, \qquad \sigma_B = -0{,}05\,219\ P,$$
$$\sigma_C = 0{,}061\,63\ P, \qquad \sigma_D = -0{,}02\,443\ P.$$

σ_C es, pues, la carga máxima. Igualándola a 1000 at. resulta que la carga total máxima admisible es $P = 16\,226$ kg.

311. Area de la sección: $F = 45{,}44$ cm.²

Distancia del c. d. g.: $z_s = 2{,}28$ cm.

M. de i. principal: $J_1 = 322$ cm.⁴, $J_2 = 1070$ cm.⁴



El eje del momento flector $\overline{MS}$ es perpendicular a $\overline{PS}$, de aquí se deduce que $\alpha = 73^\circ\ 30'\ 40''$.

Según la fórmula (36), se tiene

$$\text{tg. } \beta = \frac{J_1}{J_2} \text{ tg. } \alpha,$$

de donde

$$\beta = 45^\circ\ 28'\ 25''.$$

$\overline{NN}$ es la fibra neutra; el punto de aplicación de la fuerza dista de ella $p = 5$ sen $\beta + (2{,}28 - 0{,}8)$ cos $\beta = 4{,}60$ cm. A es el punto de máxima compresión, y su distancia a la fibra neutra es

$$e_2 = 10 \text{ sen } \beta + 2{,}28 \cos \beta = 8{,}72 \text{ cm.}$$

El m. de i. para $\overline{NN}$ es $J = J_1 \cos^2 \beta + J_2 \operatorname{sen}^2 \beta = 703$ cm.^{4}, y el momento resistente, $W_2 = J/e_2$.

La carga de rotura del hierro en T será, pues, según la fórmula (72),

$$B = \frac{F K_d}{\mu \left[1 + \frac{p F}{W_2 \cos \omega l}\right]} = \frac{92\,563}{1 + \frac{2{,}59}{\cos \omega l}},$$

en donde hay que sustituir K_d por la carga de aplastamiento, y μ por el coeficiente de Tetmajer 1,08 [véase la fórmula (74)]. Además se tiene $\omega = \sqrt{\frac{B}{EJ}}$, $l = 1000$ cm. El cálculo de B se hace como en el problema 805. Se halla $B = 5492$ kg, y de aquí la resistencia

$$P = B/4 = 1373 \text{ kg}.$$

Con esta carga total la compresión unitaria máxima de la sección es, según la fórmula (70),

$$\sigma_{máx} = -\frac{P}{F}\left[1 + \frac{p F}{W_2 \cos \omega l}\right] = -163 \text{ at. en } A,$$

siendo $\omega = \sqrt{P/EJ}$.

La máxima tracción tiene lugar en B; para hallarla determinaremos primeramente su distancia a $\overline{NN}$, que es

$$e_1 = (10 - 2{,}28) \cos \beta + 0{,}8 \operatorname{sen} \beta = 5{,}98 \text{ cm.},$$

y de aquí el momento resistente

$$W_1 = J/e_1,$$

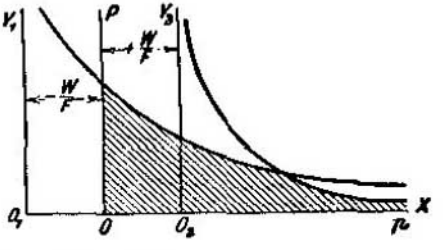
y, finalmente, según la fórmula (70),

$$\sigma = \frac{P}{F}\left[-1 + \frac{p F}{W_1 \cos \omega l}\right] = 60 \text{ at.}$$

312. Según la fórmula (68), las tensiones máximas son

$$k'_t = \frac{P}{F} + \frac{Pp}{W},$$

$$-k'_d = \frac{P}{F} - \frac{Pp}{W}.$$



Haciendo $P = y$, $p = x$ y refiriendo ambas expresiones a los ejes coordenados $y_1\, O_1\, x$ e $y_2\, O_2\, x$, las ecuaciones toman la forma

$$xy = k'_t W, \qquad xy = k'_d W,$$

que son hipérbolas referidas a sus asíntotas. El área rayada es la zona de los valores válidos de P y p.

313. El momento flector en la sección x, donde la flecha es y, vale

$$M = Ry + qx(l - x)/2.$$

y la ecuación de la línea elástica, según la fórmula (41), será

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ},$$

o

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -\left(q + \frac{RM}{EJ}\right).$$

Haciendo $q + RM/EJ = u$, la ecuación toma la forma simplificada

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\omega^2 u, \qquad \text{siendo} \qquad \omega = \sqrt{\frac{R}{EJ}}.$$

La solución general es

$$u = A \operatorname{sen} \omega x + B \cos \omega x,$$

o

$$Ry = -\frac{px}{2}(l - x) + \frac{1}{\omega^2}(A \operatorname{sen} \omega x + B \cos \omega x - q).$$

Las constantes se determinan por las condiciones siguientes: para $x = 0$, $y = 0$; para $x = \frac{l}{2}$, $\frac{dy}{dx} = 0$. Resultando

$$A = q \operatorname{tg} \omega l/2, \qquad B = q,$$

la ecuación de la línea elástica es

$$y = \frac{q}{R}\left\{\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{\cos(\omega l/2 - \omega x)}{\cos(\omega l/2)} - 1\right] - \frac{1}{2}x(l - x)\right\},$$

y la flecha en el punto medio,

$$f = \frac{q}{R}\left\{\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{1}{\cos(\omega l/2)} - 1\right] - \frac{l^2}{8}\right\}.$$

314. El momento flector en el punto x para la flecha y en el trozo a es

$$M = R(r + y_1) + (Pb/l + ql/2)x_1 - qx_1^2/2.$$

La ecuación de la línea elástica se establece como en el problema 318

$$\frac{d^2u}{dx_1^2} = -\omega^2 u,$$

poniendo como allí $u = q + \omega^2 M$, $\omega = \sqrt{R/EJ}$. La solución de esta ecuación diferencial es

$$u = A_1 \operatorname{sen} \omega x_1 + B_1 \cos \omega x_1,$$

o

$$\frac{R}{EJ}[R(r + y_1) + (Pb/l + ql/2)x_1 - qx_1^2/2] + q = A_1 \operatorname{sen} \omega x_1 + B_1 \cos \omega x_1. \quad \text{(a)}$$

Diferenciando esta ecuación se obtiene

$$\frac{R}{EJ}\left[R\frac{dy_1}{dx_1} + P\frac{b}{l} + \frac{ql}{2} - qx_1\right] = A_1 \omega \cos \omega x - B_1 \omega \operatorname{sen} \omega x_1.$$

Para el trozo b se tienen dos ecuaciones análogas; para ello basta sustituir x_1, y_1, b, A_1, B_1 por x_2, y_2, a, A_2, B_2.

Las constantes de integración A_1, A_2, B_1, B_2 se deducen, observando que para $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ deben ser $y_1 = 0$ e $y_2 = 0$; además, para la sección P $(x_1 = a,\ x_2 = b)$ se ha de tener $y_1 = y_2 = f$, $\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{dy_2}{dx_2}$. Así resulta

$$B_1 = B_2 = \frac{R^2 r}{EJ} + q\,,$$

$$A_1 = \left(\frac{R^2 r}{EJ} + q\right)\frac{1 - \cos\omega l}{\operatorname{sen}\omega l} + \frac{RP}{\omega EJ}\,\frac{\operatorname{sen}\omega b}{\operatorname{sen}\omega l}\,.$$

Sustituyendo estos valores en la ec. (a) se tiene, haciendo $x_1 = a$, $y_1 = f$, la flecha buscada

$$f = \frac{P}{\omega R}\,\frac{\operatorname{sen}\omega a\,\operatorname{sen}\omega b}{\operatorname{sen}\omega l} + \left(r + \frac{q}{R\omega^2}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\omega a + \operatorname{sen}\omega b}{\operatorname{sen}\omega l} - 1\right)$$
$$- \frac{ab}{R}\left(\frac{P}{l} + \frac{q}{2}\right).$$

315. La ordenada de la línea de carga q en la sección ξ es

$$q = q_1 - \frac{q_1 - q_2}{l}\,\xi = q_1 - a\xi\,.$$

La reacción del apoyo en A es

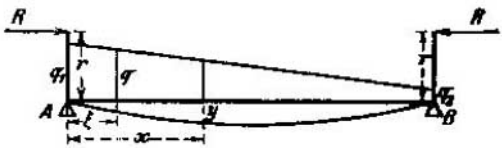
$$A = \frac{1}{l}\int_0^l q\,(l - \xi)\,d\xi = \frac{l}{6}\,(2q_1 + q_2).$$

El momento flector en la sección x es

$$M = R\,(r + y) + Ax - \int_0^x q\,(x - \xi)\,d\xi$$
$$= R\,(r + y) + Ax - q_1 x^2/2 + ax^3/6.$$

Según la fórmula (41), hay que poner

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}\,. \qquad \text{(a)}$$



Derivando esta ecuación se tiene

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{1}{EJ}\left[R\,\frac{d^2y}{dx^2} - q_1 + ax\right], \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{R}{EJ}\,\frac{d^2y}{dx^2}\,.$$

Haciendo $\frac{d^4y}{dx^4} = u$, $\frac{R}{EJ} = \omega^2$ se tiene, como en el problema 313 la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\omega^2 u\,,$$

cuya solución es

$$u = A \operatorname{sen} \omega x + B \cos \omega x.$$

La ecuación (b) nos da la relación

$$A \operatorname{sen} \omega x + B \cos \omega x = -\frac{1}{EJ}\left[R\frac{d^2y}{dx^2} - q_1 + ax\right].$$

Sustituyendo para $\frac{d^2y}{dx^2}$ el valor que da la ec. (a), se tiene

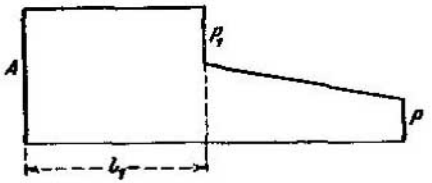
$$y = -r - \frac{q_1 - ax}{EJR^2} + \frac{1}{EJR^2}(A \operatorname{sen} \omega x + B \cos \omega x)$$

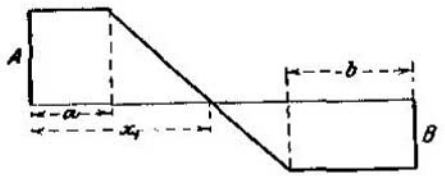
$$-\frac{1}{R}[Ax - q_1x^2/2 + ax^3/6].$$

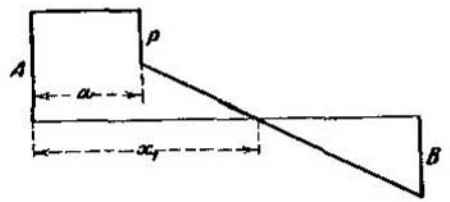
Las constantes de integración A y B se obtienen por la condición de que $y = 0$ para $x = 0$ y para $x = l$. Finalmente, se tiene para ecuación de la línea elástica

$$y = \frac{\operatorname{sen} \omega x}{\operatorname{sen} \omega l}\left[r + \frac{q_2}{R\omega^2}\right] + \frac{\operatorname{sen} \omega (l - x)}{\operatorname{sen} \omega l}\left[r + \frac{q_1}{R\omega^2}\right] - r$$

$$-\frac{q_1(l - x) + q_2x}{R\omega^2 l} - \frac{x(l - x)}{6Rl}[l(2q_1 + q_2) - x(q_1 - q_2)].$$







316. Reacción en el apoyo:

$$A = P + P_1 + q(l - l_1).$$

En el segundo trozo el diagrama tiene la inclinación:

$$\operatorname{tg} \alpha = q.$$

317. Reacciones en los apoyos:

$$A = Q_1\frac{l - a + b}{2l},$$

$$B = Q_1\frac{l + a - b}{2l}.$$

La abscisa para la que $Q = 0$ viene dada por

$$x_1 = \frac{l^2 + a^2 - b^2}{2l}.$$

318. Reacciones en los apoyos:

$$A = P\frac{l - a}{l} + Q_1\frac{l - a}{2l},$$

$$B = P\frac{a}{l} + Q_1\frac{l + a}{2l}.$$

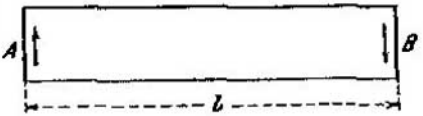
La abscisa correspondiente a $Q = 0$ es

$$x_1 = a + \frac{A - P}{Q}(l - a).$$

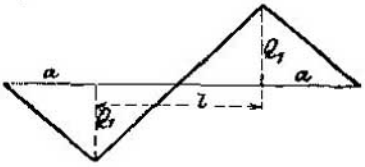
319. Reacciones en los apoyos:

$$A = B = \frac{1}{l}(P_1 p_1 + P_2 p_2).$$

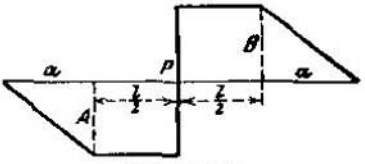
(Véase el problema **157.**)



320. La abscisa para la que $Q = 0$ es el punto medio de la viga. (Véase el problema **153.**)



Solución 320

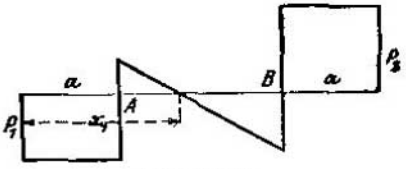


Solución 321

321. Las reacciones de los apoyos son

$$A = B = Q_1 + P/2.$$

(Véase el problema **168.**)



Solución 322

322. Reacciones de los apoyos:

$$A = P_1\left(1 - \frac{a}{l}\right) - P_2\frac{a}{l} + \frac{Q_1}{2}, \qquad B = P_2\left(1 + \frac{a}{l}\right) - P_1\frac{a}{l} + \frac{Q_1}{2}.$$

La abscisa para $Q = 0$ es

$$x_1 = \frac{l}{2} + \frac{P_1 - P_2}{Q_1}a.$$

(Véase el problema **164.**)

Solución 323

323. Reacciones en los apoyos:

$$A = B = P(1 + 2a/l).$$

---

324. Calculando el roblón por esfuerzo cortante, la fórmula (48) da

$$\tau_{máx} = k_s' = \frac{4}{3}\frac{Q}{F}, \tag{a}$$

en donde la doble sección vale $F = 2\pi d^2/4$.

Calculándolo por flexión como viga uniformemente cargada sin apoyos (véase el problema **153**), el máximo momento flector en la sección media vale

$$M_{máx} = \frac{Q}{2}\frac{3}{4}b - \frac{Q}{2}\frac{b}{4} = \frac{1}{4}Qb.$$

Haciendo

$$M_{máx} = k_b' W = k_b'\frac{\pi d^3}{32} = \frac{1}{4}Qb, \tag{b}$$

y eliminando Q entre las ecuaciones (a) y (b) se tiene

$$d = 2{,}25\, b.$$

325. Aplicación de la fórmula (75). El máximo momento flector $3\,Pl/16$ tiene lugar bajo la carga; el esfuerzo cortante máximo $3\,P/4$, en el trozo corto de la viga; además (véase Problema 261),

$$W = BH^2(1-n^4)/6\,,$$

$$F_0 = \frac{2}{3}\,BH\,\frac{1-n^4}{1+n+n^2}\,.$$

Por lo tanto, la relación buscada es

$$\frac{l}{H} \leqq \frac{4}{3}(1+n+n^2).$$

326. El momento flector en el punto medio de la viga es $Pl/8$, y el coeficiente de trabajo, según la fórmula (39),

$$\sigma = \frac{1}{8}\,Pl\,\frac{h}{4J} = \frac{3}{2}\,\frac{P}{bh}\,.$$

El esfuerzo cortante en la sección M es $P/2$; la tensión tangencial según la fórmula (44),

$$\tau = \frac{QS}{bJ} = \frac{9}{16}\,\frac{P}{bh}\,,$$

siendo $$S = 3\,bh^2/32.$$

Según la fórmula (76), las tensiones principales serán

$$\sigma_1 = \frac{27}{16}\,\frac{P}{bh}\,, \qquad \sigma_2 = -\frac{3}{16}\,\frac{P}{bh}\,,$$

y según la fórmula (77), $\operatorname{tg} 2\alpha = -3/4$,

de donde $\alpha = 71^\circ\,33'\,54''$ y $-18^\circ\,26'\,6''$

para las inclinaciones de las tensiones principales σ_2 y σ_1 respecto al eje de la viga. La tensión principal σ_3 es nula.

327. Según la fórmula (47), siendo $Q = P$ se tiene

$$\tau = \frac{3}{2}\,\frac{P}{F} = \frac{3}{4}\,\frac{P}{bh}\,.$$

El esfuerzo cortante entre ambas vigas es

$$S = bl\tau = \frac{3}{4}\,\frac{Pl}{h}\,,$$

y según la fórmula (48), siendo $Q = S$,

$$d = 2\sqrt{\frac{Pl}{\pi h k_s}}\,.$$

328. La sección peligrosa es la de arriba. Sobre ella actúa el peso P y el peso del tirante

$$G = 10{\cdot}8x{\cdot}500{\cdot}0{,}0076 = 304\,x \text{ kg. } (x \text{ en cm.}).$$

La sección debilitada por los roblones es

$$F = x\,(b-2g) = x\,(8-2g):$$

se tiene, por lo tanto, la igualdad

$$P + G = Fk'_s.$$

Según el problema **324**, el diámetro de los roblones se deduce de la fórmula

$$M_{máx} = k'_b W \quad \text{y de} \quad y = 2\sqrt[3]{\frac{Qx}{\pi k'_b}},$$

siendo $Q = (P + G)/2$ el esfuerzo cortante de la doble sección del roblón. De aquí resultan las siguientes ecuaciones:

$$(3000 + 304\,x)\,x = \frac{1}{4}\pi y^3\,1180,$$

y

$$3000 + 304x = 600x\,(8 - 2\,y),$$

de donde

$$x = 1{,}18 \text{ cm.}, \qquad y = 1{,}63 \text{ cm.}$$

329. a) De $P = \frac{\pi d^2}{4} k'_t$ se deduce $d = 3$ cm.

b) $a = 1{,}25\,d = 3{,}75$ cm.

$b = 1$ cm. de $P = 2abk'_t$.

c) Si se calcula el diámetro D por esfuerzo cortante, se utiliza la fórmula (48)

$$P = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi D^2}{4}\cdot k'_t;$$

poniendo $Q = P$, $F = 2\pi D^2/4$, $\tau_{máx} = k'_t$, resulta $D = 2{,}8$ cm.

El cálculo del diámetro D por flexión se hace como en el problema **324**. Aplicando la ecuación (b) se tiene

$$M_{máx} = k'_\delta\cdot\pi D^3/32,$$

y utilizando el resultado del problema **158** (prescindiendo del signo)

$$M_{máx} = (b/2 - \delta/4)\,P/2,$$

se tiene

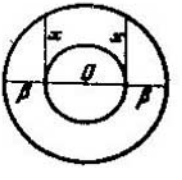
$$D = 2\sqrt[3]{\frac{P\,(b + \delta/2)}{\pi k'_\delta}} = 3{,}2 \text{ cm.},$$

que es el que debe adoptarse.

d) Calculando la anchura β del anillo, por tracción, resulta $\beta = a/2 = 1{,}9$ cm. Pero fijándose en que dicho anillo está sometido a un esfuerzo cortante a lo largo de las superficies x y aplicando la fórmula (47)

$$P = 4\,\frac{2}{3}\,bxk'_t,$$

siendo $Q = P$, $F = 4bx$, $\tau_{máx} = k'_t$.



De donde se deduce

$$x = 3{,}5 \text{ cm.},$$

e inmediatamente resulta de

$$\beta : x = x : (\beta + D)$$

el valor $\beta = 1{,}2$ cm. El valor hallado antes 1,9 cm. es el que se adopta.

e) De $P = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\delta\cdot z\cdot k'_t$ [según la fórmula (47)], se deduce

$$z = 5 \text{ cm.}$$

330. En primer lugar tenemos $Q = 600$ kg. y el momento de torsión entre C y D

$$M_t = 300 \cdot 1{,}0 = 300 \text{ mkg.}$$

Las reacciones de los apoyos son

$$A = 343 \text{ kg.}, \qquad B = 557 \text{ kg.},$$

y los momentos flectores en C y D,

$$137{,}2 \text{ mkg. y } 222{,}8 \text{ mkg.}$$

El árbol debe, pues, calcularse para la sección D. Haciendo en la fórm. (81)

$$M_b = 22\,280 \text{ cmkg.}, \quad M_t = 30\,000 \text{ cmkg.},$$

y, además, $\alpha_0 = \dfrac{k_b'}{1{,}3k'} = 1{,}92$ [según la fórmula (80)], se tiene

$$d = 9{,}33 \text{ cm.}$$

331. Según el problema 285, el momento de torsión entre C y D es

$$M_t = 71\,620\, N/n = 7162 \text{ cmkg.},$$

Las reacciones de los apoyos son

$$A = 135 \text{ kg.}, \qquad B = 415 \text{ kg.},$$

y los momentos flectores,

$$6750 \text{ cmkg. en } C, \qquad 4000 \text{ cmkg. en } B.$$

El eje ha de calcularse, pues, para la sección C.

Según la fórmula (80), la «relación de dilataciones» es

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3k_t} = 1{,}58,$$

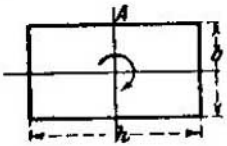
y la fórmula (81) nos da, tomando

$$M_b = 6750 \text{ cmkg.}, \quad M_t = 7162 \text{ cmkg.},$$

el diámetro buscado

$$d = 6{,}48 \text{ cm.}$$

332. La carga máxima por flexión y por tensión corresponde al punto A. La debida a la flexión es



$$\sigma = M/W, \quad \text{siendo} \quad W = h\,b^2/6,$$

y la carga producida por la torsión [según la fórmula (62)] vale

$$\tau = \frac{1}{\eta_2}\,\frac{M_t}{h\,b^2}, \qquad \left(\frac{1}{\eta_2} \approx 4{,}5\right).$$

Sustituyendo estos valores, así como $h = b/n$, y $m = 10/3$ en la fórm. (78), resulta

$$b^3 = \frac{n}{k_b'}\,[2{,}1\,M_b + 1{,}95\sqrt{4\,M_b^2 + 9\alpha_0^2 M_t^2}],$$

en donde, según la fórmula (80),

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3k_t}.$$

333. La máxima dilatación en el punto (yz) de la sección es, según la fórmula (79),

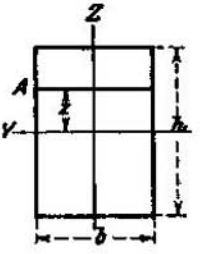
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\,[0{,}35\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(a_0\tau)^2}].$$

Para cualquier punto A del contorno (puesto que únicamente en él podrán producirse las dilataciones máximas), la carga debida a la flexión es

$$\sigma = M_b z/J, \qquad J = bh^3/12,$$

y la debida a la torsión, según la fórmula (62), para $y = b/2$

$$\tau = \frac{1}{\eta_b}\,\frac{M_t}{b^2h^2}\,(h^2 - 4z^2) \qquad \left(\frac{1}{\eta_b} \approx 4{,}5\right).$$



Sustituyendo estos valores en la expresión de ε_1, se tiene

$$\varepsilon_1 = F(z)$$

y haciendo ahora $\dfrac{dF(z)}{dz} = 0$,

se obtiene para el lugar buscado la ecuación

$$z^6 + C_4 z^4 + C_2 z^2 + C_0 = 0,$$

en donde

$$C_4 = \frac{0{,}4637}{a} - \frac{h^2}{2},$$

$$C_2 = \frac{1}{16a^2}\,(ah^2 - 1)\,(ah^2 - 0{,}710),$$

$$C_0 = -0{,}00\,226\,h^4/a.$$

La significación de la constante a es

$$a = \frac{1}{\eta_b}\,\frac{a_0^2 M_t^2}{b^2 M_b^2}.$$

334. Aplicación del problema anterior. Siendo

$$M_b = M_t, \qquad b = h/2, \qquad a_0 = 1,$$

se obtienen los valores

$$1/\eta_b = 4, \qquad a = 18/h^2,$$

$$C_4 = -0{,}4742\,h^2, \qquad C_2 = 0{,}0567\,h^4, \qquad C_0 = -0{,}000\,126\,h^6,$$

y, por lo tanto, la ecuación del lugar de la máxima dilatación, siendo $x = z^2/h^2$, es

$$x^3 - 0{,}4742\,x^2 + 0{,}0567\,x - 0{,}000\,126 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son

$$x_1 = 0{,}0022, \qquad x_2 = 0{,}2292, \qquad x_3 = 0{,}2428,$$

a las que corresponden

$$z_1 = 0{,}047\,h, \qquad z_2 = 0{,}479\,h, \qquad z_3 = 0{,}493\,h.$$

De estos valores sólo el primero corresponde a un máximo de la dilatación, s. Haciendo

$$\sigma = \frac{M_b z_1}{J} = 1{,}126\,\frac{M_b}{h^3},$$

$$\tau = 4\,\frac{M_t}{b^2h^3}\,(h^2 - 4z_1^2) = 15{,}85\,\frac{M_t}{h^3},$$

la fórmula (79) da

$$\varepsilon_{máx} = \frac{1}{E}\left[0{,}35\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\alpha_0^2\tau^2}\right] = 21{,}0\frac{M_b}{Eh^3}.$$

Por el contrario, los otros dos valores de z dan para la dilatación los valores más pequeños

$$11{,}7\frac{M_b}{Eh^3} \quad \text{y} \quad 11{,}8\frac{M_b}{Eh^3}.$$

335. La fuerza axial P produce en primer lugar un trabajo de compresión

$$\sigma = P/\pi r^2.$$

Para producir la fuerza P es necesario desarrollar un momento de torsión en el tornillo, que vale

$$M_t = Pr\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \varrho),$$

y la tensión máxima que resulta es, según la fórmula (54),

$$\tau = \frac{2}{\pi}\frac{M_t}{r^3} = 2\sigma\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \varrho).$$

Según la fórmula (79), la tensión compuesta es

$$0{,}35\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2} = 3000 \text{ at.},$$

y según la fórmula (78 a), para $k_n = k_d' = 900$ at. $k_t' = 560$ at. se tiene

$$\alpha_0 = \frac{10}{3}\frac{k_n}{k_t'} = \frac{10}{13}\frac{900}{560} = 1{,}23.$$

Sustituyendo estos valores, resulta

$$P = 139\,987 \text{ kg}.$$

336. $\overline{DE}$ debe considerarse como una viga empotrada en sus extremos y en cuyo punto medio actúa la fuerza P; el máximo momento flector es $Pl/8 = 100$ mkg. De $M_{máx} = k_b' W$ siendo $W = \pi r^3/4$ se deduce $r = 2{,}2$ cm. El momento de empotramiento en D y E somete a torsión los trozos finales; según la fórmula (54), la tensión que se origina por esta causa es

$$\tau_{máx} = k_t' = \frac{2}{\pi}\frac{M_t}{r^3} = \frac{k_b'}{2} = 660 \text{ at.}, \text{ puesto que } M_t = M_{máx} = k_b'\frac{\pi}{4}r^3.$$

---

337. Llamando V_1 y V_2 a las reacciones transversales que se producen en los puntos A y B, las ecuaciones diferenciales de la línea elástica o barra deformada son:

Para el trozo $\overline{AC}$

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = -\frac{Py_1}{EJ} - \frac{V_1x_1}{EJ},$$

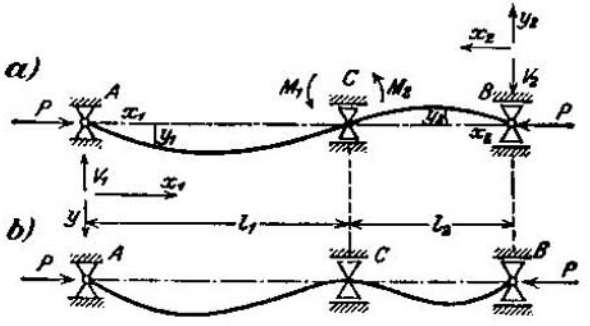
o haciendo $\omega^2 = P/EJ$

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} + \omega^2 y_1 = -\frac{V_1x_1}{EJ};$$

y haciendo lo mismo para el otro trozo $\overline{BC}$; las soluciones son, llamando $A_1, \ldots B_2$ a las constantes de integración,

$$y_1 = -\frac{V_1 x_1}{P} + A_1 \cos \omega x_1 + B_1 \operatorname{sen} \omega x_1 ,$$

$$y_2 = -\frac{V_2 x_2}{P} + A_2 \cos \omega x_2 + B_2 \operatorname{sen} \omega x_2 .$$



Las condiciones límites son:

a) $y_1(0) = 0$, b) $y_2(0) = 0$,

c) $y_1(l_1) = 0$, d) $y_2(l_2) = 0$.

e) La continuidad de la dirección de la tangente a la elástica en C da

$$y'_1(l_1) = y'_2(l_2) ,$$

f) La igualdad de momentos en C da

$$y''_1(l_1) + y''_2(l_2) = 0.$$

De lo cual resultan las dos ecuaciones

$$\begin{cases} V_1 l_1 [\omega \operatorname{ctg} \omega l_1 - 1/l_1] - V_2 l_2 [\omega \operatorname{ctg} \omega l_2 - 1/l_2] = 0 , \\ V_1 l_1 + V_2 l_2 = 0. \end{cases}$$

Para que exista una solución distinta de la ($V_1 = V_2 = 0$), debe ser nulo el determinante del sistema. Así resulta

$$\frac{1}{\omega l_1} + \frac{1}{\omega l_2} = \operatorname{ctg} \omega l_1 + \operatorname{ctg} \omega l_2 , \tag{1}$$

que puede escribirse en la forma

$$\omega l_2 \operatorname{sen} \omega l_2 [\omega l_1 \cos \omega l_1 - \operatorname{sen} \omega l_1] + \omega l_1 \operatorname{sen} \omega l_1 [\omega l_2 \cos \omega l_2 - \operatorname{sen} \omega l_2] = 0. \tag{2}$$

La discusión de esta ecuación para determinar la carga total de pandeo que se busca, y que debe corresponder al valor mínimo de ω, obliga a distinguir los siguientes casos:

I. Sea $l_1 \neq l_2$.

La ec. (2) queda satisfecha: 1.° Cuando ella o su equivalente la ec. (1) es una identidad. La forma de pandeo correspondiente a este caso está

representada en la figura a). 2.° Cuando los paréntesis de la (2) son nulos. La forma de pandeo es la que da la figura b), que equivale a un empotramiento de los dos trozos en el punto C. El valor de ω correspondiente al trozo de mayor longitud es el que determina la fuerza de pandeo. Cuando sea admisible un solo valor de P en toda la barra, este caso no tiene aplicación.

II. Sea $l_1 = l_2$.

La ecuación (2) se simplifica reduciéndose a

$$\omega l_1 \operatorname{sen} \omega l_1 \, [\omega l_1 \cos \omega l_1 - \operatorname{sen} \omega l_1] = 0.$$

La ecuación queda satisfecha: 1.° Para $\operatorname{sen} \omega l_1 = 0$, o sea $\omega = \pi/l_1$, de donde

$$P = \omega^2 E J = 4\pi^2 E J/l^2 \approx 39{,}5\, E J/l^2.$$

2.° Para $\operatorname{tg} \omega l_1 = \omega l_1$. La raíz menor de esta ecuación es $\omega l_1 \approx 4{,}49$, y de este valor se deduce

$$P \approx 4 \cdot 4{,}49^2 \cdot E J/l^2 \approx 80{,}5\, E J/l^2.$$

El primer caso corresponde a la deformación de pandeo a); el 2.°, a la b).

338. Véase la solución y las figuras del problema anterior. Se tiene

$$l_1 = 2\, l_2 = 2l/3.$$

1.° Deformación a). La ecuación (1) es en este caso

$$3 = 2\omega l_2 \, [\operatorname{ctg} \omega l_2 + \operatorname{ctg} 2\omega l_2] = \omega l_2 \, [3 \operatorname{ctg} \omega l_2 - \operatorname{tg} \omega l_2],$$

o

$$\omega l_2 = \frac{3 \operatorname{tg} \omega l_2}{3 - \operatorname{tg}^2 \omega l_2}.$$

La menor raíz de esta ecuación es $\omega l_2 \approx 1{,}928$. De aquí se deduce la carga de pandeo

$$P \approx 9 \cdot 1{,}928^2\, E J/l^2 \approx 33{,}5\, E J/l^2.$$

2.° Deformación b). En este caso se verifica la ecuación

$$\omega l_1 = \operatorname{tg} \omega l_1.$$

La raíz menor es $\omega l_1 \approx 4{,}49$, de donde resulta

$$P = \omega^2 E J \approx \frac{9}{4}\, 4{,}49^2\, E J/l^2 \approx 45{,}3\, E J/l^2.$$

Por lo tanto, es aplicable el caso a), que tiene lugar para una carga menor.

339. Introduciendo, como en los problemas anteriores, las reacciones de los apoyos V_1, V_2 como incógnitas, las ecuaciones diferenciales de la línea elástica respecto a los ejes coordenados señalados en la figura son:

en el trozo $\overline{AC}$, $$\frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = -\frac{P y_1}{E J} + \frac{V_1 x_1}{E J};$$

en el trozo $\overline{CM}$, $$\frac{d^2 y_2}{d x^2} = -\frac{P y_2}{E J} - \frac{V_2 x_2}{E J} + \frac{V_1 (l_1 + x_2)}{E J}.$$

Suponiendo que la elástica es simétrica (lo que evidentemente es suficiente para hallar la carga total mínima), las condiciones límites son:

a) $y_1(0) = 0$, b) $y_1(l_1) = 0$,
c) $y_2(0) = 0$, d) $y_2'(l_2/2) = 0$,
e) $y_2''(l_2/2) = 0$ (el esfuerzo cortante se anula en el punto M),
f) $y_1'(l_1) = y_2'(0)$ (continuidad de la inclinación de las tangentes en el punto C).

Las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales, con la simplificación corriente $\omega^2 = P/EJ$, son

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos \omega x_1 + B_1 \operatorname{sen} \omega x_1 + \frac{V_1}{P} x_1, \\ y_2 &= A_2 \cos \omega x_2 + B_2 \operatorname{sen} \omega x_2 - \frac{V_2}{P} x_2 + \frac{V_1}{P}(l_1 + x_2). \end{aligned}\right\}$$

Después de eliminar las seis constantes A_1, A_2, B_1, B_2, V_1, V_2 por medio de las condiciones de los límites a) hasta f), se obtiene para determinar la carga mínima de pandeo la siguiente ecuación trascendente:

$$\operatorname{cotg} \omega l_1 - \frac{1}{\omega l_1} = \operatorname{tg} \frac{\omega l_2}{2},$$

que puede escribirse

$$\cos \omega (l_1 + l_2/2) = \frac{1}{\omega l_1} \operatorname{sen} \omega l_1 \cos \frac{\omega l_2}{2}.$$

340. Para el caso $l_1 = l_2 = l/3$, la ecuación trascendente del problema anterior, haciendo $\omega l_2/2 = \alpha$, toma la forma

$$\cos \alpha \left[4 \cos^2 \alpha - 3 - \frac{1}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \right] = 0,$$

que se descompone en las dos siguientes:

$$\cos \alpha = 0 \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Las raíces menores de estas ecuaciones son

$$\alpha = \pi/2 \quad \text{y} \quad \alpha = 2{,}568.$$

Para la determinación de la carga de pandeo mínima solamente es válido el primer valor $\alpha = \pi/2 = 1{,}57$. La carga de pandeo vale, pues,

$$P = EJ\omega^2 = \left(\frac{2\alpha}{l_2}\right)^2 EJ = \frac{9\pi^2 EJ}{l^2}.$$

341. Para el caso $l_2 = 2l_1 = l/2$, la ecuación trascendente del problema 339 toma la forma sencilla

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2\alpha,$$

en que $\alpha = \omega l_1$. La raíz menor de esta ecuación (que es la misma que la correspondiente a una barra empotrada en un extremo y articulada en el otro) es $2\alpha = 2\omega l_1 \approx 4{,}49$, es decir, $\alpha = \omega l_1 \approx 2{,}245$.

De ahí se deduce la carga de pandeo

$$P = EJ\omega^2 \approx (4 \cdot 2{,}245)^2 \frac{EJ}{l^2} \approx \frac{80{,}7\, EJ}{l^2}.$$

342. Contando la variable x_1 desde A hacia la derecha para el primer trozo $\overline{AC}$, y la x_2 desde C también hacia la derecha para el trozo $\overline{CB}$, las ecuaciones diferenciales de la línea elástica son:

Trozo $\overline{AC}$, $$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} + \omega^2 y_1 = 0, \text{ en donde } \omega^2 = \frac{P}{EJ_1};$$

trozo $\overline{CB}$, $$\frac{d^2y_2}{dx_2^2} + \alpha^2\omega^2 y_2 = 0, \text{ en donde } \alpha^2\omega^2 = \frac{P}{EJ_2}, \text{ con } \alpha^2 = \frac{J_1}{J_2};$$

las condiciones límites son:

$$\text{a) } y_1(0) = 0, \qquad \text{b) } y_1(l_1) = y_2(0),$$
$$\text{c) } y_1'(l_1) = y_2'(0), \qquad \text{d) } y_2(l_2) = 0.$$

Las soluciones tienen la forma

$$y_1 = A_1 \cos \omega x_1 + B_1 \operatorname{sen} \omega x_1,$$
$$y_2 = A_2 \cos \alpha\omega x_2 + B_2 \operatorname{sen} \alpha\omega x_2,$$

siendo A_1, A_2, B_1, B_2 las constantes de integración.

Teniendo en cuenta las condiciones de los límites y eliminando las constantes, resulta la ecuación

$$\alpha \operatorname{tg} \omega l_1 + \operatorname{tg} \alpha\omega l_2 = 0. \qquad \text{(a)}$$

La raíz menor de esta ecuación da la carga de pandeo P buscada, teniendo en cuenta que

$$P = EJ\omega^2$$

Para $J_1 = J_2$ se tiene $\alpha = 1$, y la ecuación (a) se reduce sencillamente a

$$\operatorname{sen} \omega(l_1 + l_2) \equiv \operatorname{sen} \omega l = 0,$$

como en el caso de una barra uniforme simplemente articulada en sus extremos.

343. Las ecuaciones diferenciales de la línea elástica son:

En el trozo $\overline{AC}$, $$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = -\frac{Ky_1}{EJ};$$

en el trozo $\overline{CB}$, $$\frac{d^2y_2}{dx^2} = 0.$$

Las condiciones límites son:

$$\begin{cases} \text{a) } y_1(0) = 0, & \text{b) } y_2(l_2) = 0, \\ \text{c) } y_1(l_1) = y_2(0), & \text{d) } y_1'(l_1) = y_2'(0). \end{cases}$$

Las ecuaciones diferenciales tienen las soluciones

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \cos \omega x_1 + B_2 \operatorname{sen} \omega x_1, & \text{siendo } \omega^2 = P/EJ, \\ y_2 = A_2 x_2 + B_2. \end{cases}$$

Introduciendo las condiciones límites y eliminando las constantes A_1, A_2, B_1, B_2, resulta para ω la ecuación

$$\operatorname{tg} \omega l_1 + \omega l_2 = 0.$$

De la raíz menor de esta ecuación se deduce la carga de pandeo

$$P = EJ\omega^2.$$

344. Con las notaciones de la figura, las ecuaciones de la elástica son:

Trozo $\overline{AB}$, $$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0;$$

trozo $\overline{BC}$, $$\frac{d^2y_2}{dx_2^2} + \frac{P}{EJ}y_2 = 0.$$

Las condiciones límites son

$$\text{a) } y_1(0) = 0, \qquad \text{b) } y_1(l_1) = y_2(0).$$
$$\text{c) } y_1'(l_1) = y_2'(0), \qquad \text{d) } y_2'(l_2/2) = 0.$$

Las soluciones de las ecuaciones tienen, siendo $P/EJ = \omega^2$, la forma

$$\begin{cases} y_1 = A_1 x_1 + B_1, \\ y_2 = A_2 \cos \omega x_2 + B_2 \operatorname{sen} \omega x_2. \end{cases}$$

Las condiciones límites dan las relaciones

$$B_1 = 0, \quad A_1 l_1 = A_2, \quad A_1 = B_2\omega,$$
$$-A_1 \operatorname{sen}(\omega l_2/2) + B_2 \cos(\omega l_2/2) = 0,$$

y eliminando las constantes de integración A_1, A_2, B_1, B_2 resulta la ecuación

$$\operatorname{tg}\frac{\omega l_2}{2} = \frac{1}{\omega l_1}.$$

La raíz menor de la ecuación da, sustituída en $P = EJ\omega^2$, la carga de pandeo buscada.

Para demostrar la relación que se indica en el enunciado, se escribe y_2 en la siguiente forma:

$$y_2 = A_2\left[\cos \omega x_2 + \frac{1}{\omega l_1}\operatorname{sen} \omega x_2\right],$$

y se calcula la abscisa a_2 del punto de intersección A' de y_2 con el eje, haciendo $y_2 = 0$. De esta manera se tiene

$$\operatorname{cotg} \omega a_2 = -\frac{1}{\omega l_1}.$$

La longitud $\overline{A'B'}$ es, pues,

$$L = -2a_2 + l_2,$$

en donde $\operatorname{sen} \omega L = 0$, o sea $\omega L = \pi$; se tiene, por lo tanto,

$$\omega a_2 = \frac{\omega l_2}{2} - \frac{\pi}{2},$$

o sea

$$\operatorname{ctg} \omega a_2 = -\operatorname{tg}\frac{\omega l_2}{2} = -\frac{1}{\omega l_1},$$

que, en efecto, es idéntica a la ecuación (a) anteriormente obtenida.

345. Sean F, F_a, F_b, F_c las áreas de los triángulos ABC, OBC, OCA, OAB, y sean J_a, J_b, J_c los m. de i. de las secciones de las barras.

Supongamos que el punto O se sale del plano en una magnitud ξ. Las tres barras tendrán en O un plano tangente común, cuyas distancias a A, B, C serán, por ejemplo, f_a, f_b, f_c.

Demostremos primeramente que

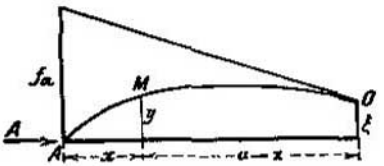
$$\xi = \frac{f_a F_a + f_b F_b + f_c F_c}{F}. \qquad \text{(a)}$$

Imaginemos fija la BC y que el punto A se eleva f_a; entonces O deberá elevarse

$$f_a \frac{h_a}{h'_a} = f_a \frac{\Delta OBC}{\Delta ABC} = f_a \frac{F_a}{F}.$$

Lo mismo se repite para los otros dos lados, y sumando las tres expresiones sale la relación (a).

La figura adjunta representa la sección por OA. El momento flector en el punto M es $M = Ay$, y la ecuación de la línea elástica es



$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Ay}{EJ_a} = -\omega_1^2 y,$$

cuya solución tiene la forma

$$y = C_1 \operatorname{sen} \omega_1 x + C_2 \cos \omega_1 x,$$

siendo C_1 y C_2 constantes de integración. Para

$$x = 0, \qquad y = 0$$

se tiene

$$C_2 = 0;$$

además,

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \omega_1 \cos \omega_1 x,$$

y para

$$x = a, \qquad y = \xi$$

se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_a - \xi}{a} = C_1 \omega_1 \cos \omega_1 a;$$

eliminando C_1 entre ésta y la ecuación

$$\xi = C_1 \operatorname{sen} \omega_1 a,$$

se deduce

$$f_a = \xi \left(1 - \frac{\omega_1 a}{\operatorname{tg} \omega_1 a}\right).$$

Para f_b y f_c se obtienen expresiones análogas. Sustituyendo en la ecuación (a), resulta

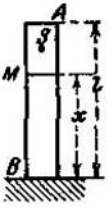
$$\frac{\omega_1 a}{\operatorname{tg} \omega_1 a} F_a + \frac{\omega_2 b}{\operatorname{tg} \omega_2 b} F_b + \frac{\omega_3 c}{\operatorname{tg} \omega_3 c} F_c = 0 \qquad \text{(b)}$$

como condición para que se inicie el pandeo. En la fórmula anterior

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A}{EJ_a}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{B}{EJ_b}}, \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{C}{EJ_c}}.$$

Obsérvese que, para el equilibrio, hemos determinado las tres fuerzas A, B, C, salvo un factor común k, es decir que dos de las fuerzas, por ejemplo la B y la C, están dadas por la tercera A. La ecuación (b) es la que determina el factor k o la fuerza A. El valor menor de A que la satisface es el que determina las cargas de pandeo A, B, C.

346. Una solución aproximada del problema se obtiene del siguiente modo: Se considera el peso propio $q(l-x)$ del trozo $\overline{AM}$ como una fuerza axial que actúa en el c. d. g. S y que trata de provocar el pandeo en la barra $\overline{SB}$ de longitud $x + (l-x)/2$. Aplicando la fórmula de Euler (83) al caso b), tendremos



$$q(l-x) = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{EJ}{[x+(l-x)/2]^2},$$

o

$$q = \pi^2\,\frac{EJ}{(l-x)(l+x)^2}.$$

A cada valor de x corresponde un determinado valor de q. El peso unitario menor dará la solución. El máximo de $(l-x)(l+x)^2$ se obtiene para $x = l/3$, y con este valor resulta

$$q = \frac{27}{32}\pi^2\,\frac{EJ}{l^3} = 8{,}3\,\frac{EJ}{l^3}.$$

[La resolución exacta del problema, empleando recursos de Análisis superior, da para valor del coeficiente numerario 7,91...]

347. Sea y la deformación (flecha) en un punto cualquiera a la distancia x de A; el momento flector es $M = Py$, y la ecuación de la línea elástica [véase la ec. (41)] es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EJ}\,y = -\omega^2 y$$

con

$$\omega = \sqrt{P/EJ}.$$

La solución de esta ecuación es

$$y = f \operatorname{sen} \omega x, \qquad \text{(a)}$$

teniendo en cuenta que para determinar las constantes de integración podemos observar que para $x = 0$, $y = 0$ y para $x = x_0/2$, $y = f$, y $\frac{dy}{dx} = 0$. De esta manera resulta

$$\omega x_0 = \pi. \qquad \text{(b)}$$

La longitud de la barra es

$$l = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \approx \int_0^{x_0} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx. \qquad \text{(c)}$$

Derivando la ec. (a)

$$\frac{dy}{dx} = f\omega \cos \omega x.$$

Sustituyendo este valor en (c), tendremos

$$l \approx \int_0^{x_0} \left[1 + \frac{1}{2} f^2 \omega^2 \cos^2 \omega x\right] dx = x_0 + \frac{1}{2} f^2 \omega^2 \int_0^{x_0} \cos^2 \omega x dx,$$

de donde

$$l \approx x_0 \left(1 + \frac{1}{4} f^2 \omega^2\right),$$

o sea con suficiente aproximación

$$l^2 = \frac{\pi^2 E J}{P_k} \approx x_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} f^2 \omega^2\right) = \frac{\pi^2 E J}{P} \left(1 + \frac{P f^2}{2 E J}\right),$$

de donde utilizando la ec. (b) se deduce

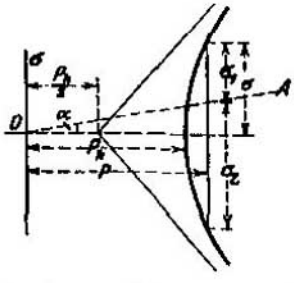
$$f^2 = 2 E J \left(\frac{1}{P_k} - \frac{1}{P}\right).$$

En esta expresión, $P_k = \pi^2 E J / l^2$ representa la carga de pandeo, según Euler [véanse fórmulas (83) y (84)].

848. Las tensiones máximas σ_1, σ_2 son las de los puntos interior y exterior de la mitad de la varilla. Estas tensiones son, según la fórmula (67),

$$\sigma_{1,2} = -\frac{P}{F} \pm \frac{Pf}{W}, \quad \text{en donde} \quad W = \frac{J}{e};$$

haciendo uso del resultado del ejercicio anterior sale



$$\sigma_{1,2} = -P\left[\frac{1}{F} \mp e\sqrt{\frac{2E}{J}\left(\frac{1}{P_k} - \frac{1}{P}\right)}\right]$$

o

$$\sigma_1 = -\frac{P}{F} + \sigma \text{ en el exterior,}$$

$$\sigma_2 = -\frac{P}{F} - \sigma \text{ en el interior,}$$

siendo

$$\sigma = Pe\sqrt{\frac{2E}{J}\left(\frac{1}{P_k} - \frac{1}{P}\right)}.$$

A esta ecuación corresponde una hipérbola con las coordenadas P y σ, cuyo centro dista de O la magnitud $P_k/2$ y cuyo vértice dista P_k.

Trazando la recta OA con la inclinación

$$\operatorname{tg} \alpha = 1/F,$$

se tiene el diagrama de las tensiones σ_1 y σ_2 como segmentos de la ordenada 2σ.

849. La curvatura de la línea elástica debida al momento flector es

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{d\varphi_1}{dx} = -\frac{M}{EJ},$$

y la debida al esfuerzo cortante, siendo el ángulo de deslizamiento $d\varphi_2 = \varkappa\, dQ/GF$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{\varkappa}{GF}\frac{dQ}{dx};$$

por lo tanto, la curvatura total es

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{M}{EJ} + \frac{\varkappa}{GF}\frac{dQ}{dx}.$$

Haciendo $Q = -dM/dx$, se obtiene la ecuación de la línea elástica, teniendo en cuenta los esfuerzos tangenciales, cuya forma es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} - \frac{\varkappa}{GF}\frac{d^2M}{dx^2}.$$

Para hallar la carga total de pandeo se hace $M = Py$, con lo cual se tiene

$$y''\left(1 - \frac{\varkappa P}{GF}\right) + \frac{P}{EJ}y = 0.$$

Esta ecuación tiene la misma forma $y'' + \omega^2 y = 0$ que la de Euler. La condición de pandeo $\omega l = \pi$ es, por lo tanto,

$$\frac{P/EJ}{1 - \varkappa P/GF} = \frac{\pi^2}{l^2},$$

de donde se deduce la carga de pandeo

$$P = P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\,\frac{1}{1 + \dfrac{EJ}{GF}\dfrac{\varkappa\pi^2}{l^2}}.$$

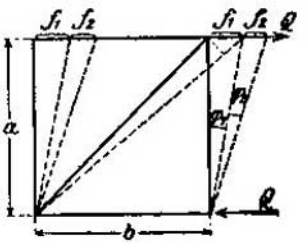
Las tensiones tangenciales hacen bajar la carga de pandeo. Pero, de hecho, la influencia de las tensiones tangenciales es sensible solamente en las columnas huecas y en las vigas de celosía con montantes y diagonales.

850. Se calcula el ángulo de deslizamiento o distorsión φ producido por el esfuerzo cortante en un recuadro cualquiera. El esfuerzo de tracción en las diagonales vale $Q/\cos\alpha$ y su longitud es $a/\operatorname{sen}\alpha$; por lo tanto, el desplazamiento lateral producido por el alargamiento de la diagonal es

$$f_1 = \frac{Qa}{\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha\, EF_1}.$$

El desplazamiento lateral debido a la compresión de los montantes es

$$f_2 = \frac{Qb}{EF_2},$$



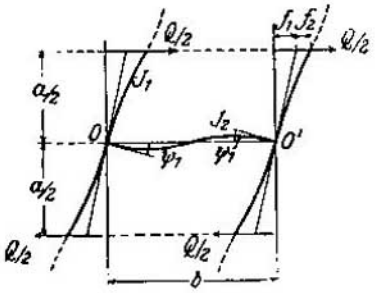
y, por lo tanto, el ángulo total de deslizamiento vale

$$\varphi = \frac{f_1 + f_2}{a} = \frac{Q}{\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha\, EF_1} + \frac{Qb}{aEF_2}.$$

De esta última ecuación se saca el valor φ/Q, y sustituyéndolo en vez de $\varkappa/GF$ en la última ecuación del problema anterior, se obtiene el resultado.

351. Se considera la deformación de un trozo de viga comprendido entre los centros de dos recuadros adyacentes, producida por los esfuerzos cortantes. Por razones de simetría, en los puntos medios de los montantes la elástica presenta puntos de inflexión. La deformación del trozo representado, a causa del esfuerzo cortante se compone del desplazamiento f_1 debido a la flexión de los montantes, y del f_2 debido a la flexión de las cabezas. La inclinación ψ_1 de los montantes debida a los momentos $Qa/2$ es

$$\psi_1 = \frac{Qa}{2}\frac{b}{3EJ_1} - \frac{Qa}{2}\frac{b}{6EJ_2} = \frac{Qab}{12EJ_2};$$



luego

$$f_1 = \frac{a\psi}{2} = \frac{Qa^2b}{24EJ_2}.$$

Además, tenemos

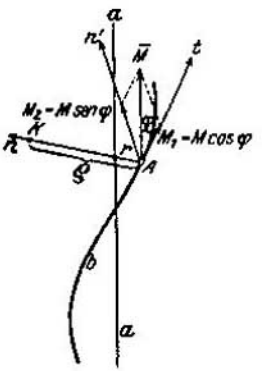
$$f_2 = \frac{Q}{2}\frac{(a/2)^3}{3EJ_1} = \frac{Qa^3}{48EJ_1}.$$

La distorsión debida al esfuerzo cortante es, pues,

$$\varphi = \frac{f_1 + f_2}{a/2} = \frac{Qab}{12EJ_2} + \frac{Qa^2}{24EJ_1}.$$

Sustituyendo el valor de φ/Q en vez de $\varkappa/GF$ en la última ecuación del problema **849** se obtiene el resultado.

352. La breve demostración que sigue se debe a R. Grammel (Ing. Archiv. Tomo I, pág. 243, 1930).



El eje a del alambre que se supone rectilíneo y vertical, en el instante del pandeo se convierte en una curva alabeada b. En cada sección transversal A del alambre actúa el vector momento M vertical, cuyas componentes según la tangente t y la binormal n' son el momento $M_1 = M\cos\varphi$ (que es propiamente el momento torsor) y $M_2 = M \operatorname{sen}\varphi = M\varphi$ (momento flector), siendo φ el ángulo que forman M y t. En la normal principal horizontal n de la curva no hay momento flector; por lo tanto, el plano nt es el plano osculador de la curva b. Además, la curva b tiene pendiente uniforme, puesto que únicamente podría alterarse por efecto de un momento flector horizontal. Por lo tanto, φ es invariable y también lo será M_2, y en consecuencia, la curvatura $1/\varphi$ de la curva b; luego se trata de una hélice en la que

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{4\pi^2 r}{l^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi \approx \varphi = \frac{2\pi r}{l}.$$

siendo l el paso y r el radio. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la línea elástica, se tiene

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_2}{EJ}, \qquad \text{o sea} \qquad \frac{4\pi^2 r}{l^2} = \frac{2\pi}{l}\varphi = \frac{M\varphi}{EJ},$$

y, por lo tanto,

$$M = \frac{2\pi E J}{l},$$

siendo M el valor que produce el pandeo cuando M crece desde cero hasta alcanzar ese valor. (Obsérvese que en esta deducción se suponen libres los extremos del alambre.)

---

353. Según la fórmula (87), para madera tenemos $\lambda = l/i \geq 100$. Por lo tanto, $i^2 = 4/3$ cm.^{2}; luego para $l = 100\, i = 1{,}15$ m. cesa la validez de la fórmula de Euler.

354. La longitud reducida de la barra es, según la fórmula (85), $l_r = 0{,}7\, l = 2{,}1$ m., y, por lo tanto, siendo $i = d/4 = 5$ cm., el valor de λ es $\lambda = l_r/i = 42$. La fórmula (86) da la carga unitaria de rotura por pandeo

$$K_k = 293 - 1{,}94\ \lambda = 211 \text{ at.};$$

por lo tanto, la carga total de pandeo será

$$P_k = \frac{\pi d^2}{4} \cdot K_k = 66287 \text{ kg}.$$

355. Se supone primeramente que es válida la aplicación de la fórmula (89). El m. de i. de la sección es

$$J = \frac{\pi}{4}(12^4 - 8^4) = \pi\, 2684 \text{ cm.}^4,$$

y el área,

$$F = \pi\, 80 \text{ cm.}^2,$$

de donde

$$i^2 = J/F = 33{,}5 \text{ cm.}^2$$

Para la resistencia al pandeo tenemos primeramente

$$K_k = \frac{90\,000}{F} = 358 \text{ at.},$$

y de aquí, según la fórmula (89),

$$\lambda = \frac{l}{i} = \sqrt{\frac{9\,870\,000}{F}} = 166 \quad \text{ó} \quad l = 965 \text{ cm.},$$

que es la longitud de rotura por pandeo. Como $\lambda = l/i = 166$, es decir, mayor que 80, la aplicación de la fórmula (89) es correcta.

356. Para esta forma de sustentación, la fórmula aplicable es

$$P = \frac{20{,}19\, E J}{\mathfrak{S}\, l^2},$$

de donde

$$J = \frac{\mathfrak{S}\, P\, l^2}{20{,}19\, E} = \frac{5 \cdot 50 \cdot 400^2}{20{,}19 \cdot 1000} \approx 1980 \text{ cm.}^4$$

Tomando $D = 15$ cm. y el espesor $\delta = 2,5$ cm. se halla $J = 1994$ cm.^{4} y $l/i = 93,5$; la fórmula de Euler era, pues, aplicable.

357. La posición más desfavorable del vástago del émbolo es la extrema derecha, ya que en ella puede considerarse su extremo izquierdo como empotrado en el prensaestopas y el derecho A que va guiado en línea recta como articulado; por lo tanto, es aplicable la forma d), y según la fórmula (85) tendremos

$$\lambda = l_r/i = 0,7\, l/i,$$

y como $i = d/4$, resulta $\lambda = 2,8\, l/d$.

En los vástagos de émbolo, generalmente $l < 40\, d$, o sea $\lambda < 105$; por lo tanto, tratándose de acero dulce, se debe aplicar la fórmula (92), y la fuerza total que puede resistir es

$$P = \frac{1}{20} F K_k = \frac{1}{20} \frac{\pi d^2}{4} (3100 - 11,4\, \lambda),$$

de donde, para calcular el diámetro tendremos la ecuación

$$d^3 - 0,01032\, l d = 0,00822\, P.$$

358. Primeramente ha de decidirse si procede la aplicación de la fórmula (86) o de la (87). Aplicando la (86) tendremos para la carga total de la riostra

$$P = 5000 \text{ kg.} = \frac{1}{11} F K_k = \frac{a^2}{11} (293 - 1,94\, \lambda),$$

en donde

$$\lambda = l/i = l \sqrt{12}/a = 1384/a.$$

Esto nos da la ecuación

$$a^3 - 9,18\, a = 187,71,$$

de donde

$$a = 19 \text{ cm.}$$

Con este valor se obtiene $\lambda = 72,8$, lo cual justifica el empleo de la fórm. (86).

359. La sección es $F = 210$ cm.^{2}; la distancia del c. d. g. al borde superior es $e = 4,64$ cm.; el m. de i. respecto al borde superior, 7750 cm.^{4}, y, por lo tanto, respecto a la horizontal que pasa por el centro de gravedad es

$$J = 3228,78 \text{ cm.}^4;$$

luego el radio de giro,

$$i = \sqrt{J/F} = 3,92 \text{ cm.}$$

Según los datos, la carga unitaria de trabajo admisible para el pandeo es

$$k'_k = \frac{P}{F} = \frac{120}{210} = 0,572 \text{ t/cm.}^2$$

De la ecuación

$$k'_k = \alpha\, k'_d \quad \text{sale} \quad \alpha = k'_k/k'_d = 0,572,$$

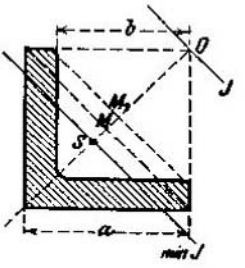
y a este valor corresponde en la tabla 4 el valor

$$\lambda = l/i = 81, \quad \text{es decir,} \quad l = 81\, i = 318 \text{ cm.} = 3,18 \text{ m.}$$

360. Como $l = 500$ cm. e $i = \sqrt{D^2 + d^2/4} = 9{,}775$ cm., el grado de esbeltez es $\lambda = l/i = 51{,}1$, al que corresponde según la tabla 4 un valor

$$\alpha = 0{,}377, \text{ y, por lo tanto, } k'_k = \alpha k'_d = 0{,}377 \cdot 700 = 254 \text{ kg./cm.}^2$$

361. El mínimo m. de i. de la sección $J_{\min}$ se calcula partiendo de J. Se considera el área del hierro en ángulo como la diferencia de los cuadrados a^2 y b^2, siendo $a = 8$ cm., $b = 6{,}8$ cm. Tendremos, pues,



$$J = \left[\frac{a^4}{12} + a^2 \cdot \overline{MO}^2\right] - \left[\frac{b^4}{12} + b^2 \cdot \overline{M_1O}^2\right],$$

en donde

$$\overline{MO} = 4\sqrt{2} \text{ cm.}, \quad \overline{M_1O} = 3{,}4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Se tiene, pues,

$$J = 1112 \text{ cm.}^4$$

De donde resulta $J_{\min} = J - (a^2 - b^2)\,\overline{SO}^2$, siendo $\overline{SO} = 7{,}87$ cm. y S el c. d. g. de la sección. Luego $J_{\min} = 43{,}3$ cm.^{4}, $i = \sqrt{\dfrac{J_{\min}}{a^2 - b^2}} = 1{,}56$ cm. Luego, según la fórmula (85),

$$\lambda = l_r/i = l/2i = 96,$$

y, finalmente, de la tabla 4 y la fórmula (94) resulta

$$\alpha = 0{,}558 \text{ y } k'_k = \alpha k'_d = 0{,}558 \cdot 700 \approx 390 \text{ at.}$$

362. El radio de giro es $i = a/\sqrt{12} = 6{,}93$ cm. Como la sección superior no puede desviarse, se debe aplicar la fórmula (85), forma d), y, por lo tanto,

$$\lambda = l_r/i = 0{,}7\, l/i = 60{,}62\,;$$

además, según la fórmula (86), la resistencia o carga de rotura por pandeo es

$$K_k = 293 - 1{,}94\lambda = 175 \text{ at.},$$

y, por lo tanto, la carga admisible,

$$P = F K_k/4 = 25{,}2 \text{ t.}, \qquad F = a^2.$$

363. El área de la sección es $F = 244{,}45$ cm.^{2}, y el m. de i. para el eje que pasa por el centro de gravedad es $J = 32\,293$ cm.^{4}, de donde

$$i = \sqrt{J/F} = 11{,}49 \text{ cm.} \qquad \text{y} \qquad \lambda = l_r/i = 2l/i = 78{,}3\,;$$

según la fórmula (85), sustentación b), la fórmula (92) da para la carga unitaria de pandeo

$$K_k = 3100 - 11{,}4\lambda = 2207 \text{ at.},$$

y, por consiguiente, la resistencia total teniendo en cuenta la seguridad es

$$P = \frac{1}{6} F K_k = 107\,900 \text{ kg.}$$

364. Area $F = 304$ cm.^{2}; m. de i. mínimo $J = 27\,285{,}33$ cm.^{4}; radio de giro $i = \sqrt{J/F} = 9{,}47$ cm.; según la fórmula (85), sustentación c), se tiene

$$\lambda = l_r/i = l/2i = 42{,}22,$$

Según la tabla 4, se tiene

$$\alpha = 0{,}690,$$

y según la fórmula (94),

$$k'_k = \alpha k'_d = 0{,}69 \cdot 600 = 414 \text{ at.};$$

y como la carga de rotura por pandeo es, según la fórmula (92),

$$K_k = 3100 - 11{,}4\lambda = 2619 \text{ at.},$$

el coeficiente de seguridad es

$$\mathfrak{S} = \frac{K_k}{k'_k} = \frac{2619}{414} = 6{,}4.$$

365. Area $F = 270$ cm.² Distancia del c. d. g. a la arista superior

$$e = 12{,}80 \text{ cm.}$$

M. de i. de la sección respecto a la arista superior

$$J = \frac{1}{3}[4 \cdot 40^3 + 2 \cdot 12^3 + 18 \cdot 3^3 + 16 \cdot 2^3] = 86\,690 \text{ cm.}^4$$

M. de i. respecto a la horizontal del centro de gravedad

$$J_1 = J - Fe^2 = 43\,274{,}73 \text{ cm.}^4$$

M. de i. respecto a la vertical del centro de gravedad

$$J_2 = \frac{1}{12}[3 \cdot 40^3 + 9 \cdot 22^3 + 28 \cdot 20^3 - 38 \cdot 16^3] = 29\,682 \text{ cm.}^4;$$

ya que $J_2 < J_1$, hay que tomar J_2 para base del cálculo. Se tiene, pues,

$$i = \sqrt{J_2/F} = 10{,}485 \text{ cm.},$$

y según la fórmula (92), la carga total admisible será

$$P = \frac{1}{\mathfrak{S}} F K_k = \frac{1}{\mathfrak{S}} F\,(3100 - 11{,}4\lambda) = 163\,000 \text{ kg.},$$

de donde siendo $\mathfrak{S} = 4$

$$\lambda = l/i = 60{,}1,$$

y la longitud buscada es

$$l = 6{,}30 \text{ m.}$$

366. Area de la sección $F = 14x^2$. Distancia del c. d. g. al canto izquierdo $e = 19x/4$; m. de i. de la sección respecto al canto izquierdo $134x^4/3$; respecto a la vertical del centro de gravedad, $J = 793x^4/42$. Radio de giro

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 1{,}161x \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{l}{i} = \frac{200}{1{,}161x}.$$

Haciendo $x = 1{,}75$ cm., se halla

$$\lambda = \frac{200}{1{,}161 \cdot 1{,}75} = 98{,}5,$$

con lo cual la tabla 4 nos da $\alpha = 0{,}513$, y según la fórmula (94),

$$k'_k = \alpha k'_d = 0{,}513 \cdot 800 = 410 \text{ at.}$$

Además,

$$F = \frac{17\,000}{410} = 41{,}5 = 14x^2, \qquad x^2 = \frac{41{,}5}{14} = 2{,}96 \text{ cm.}^2$$

y

$$x = 1{,}72 \text{ cm.};$$

este valor puede darse por definitivo.

367. Area de la sección $F = 75{,}10$ cm.^{2}; la carga total admisible es

$$P = \frac{1}{6} K_k F$$

o bien, según la fórmula (93),

$$13\,000 = \frac{1}{4} \frac{21\,220\,000}{\lambda^2} 75{,}10,$$

de donde

$$\lambda = 171{,}4,$$

y, por lo tanto, resulta justificado el empleo de la fórmula (93). De

$$\lambda = l/i$$

se deduce

$$i = 3{,}73 \text{ cm.}$$

y el m. de i. mínimo

$$J = F i^2 = 1047{,}0 \text{ cm.}^4$$

Siendo J_0 el m. de i. de un perfil en U respecto a la vertical que pasa por el centro de gravedad (dicho c. d. g. dista del canto más largo $e = 2{,}34$ cm.), el cálculo da $J_0 = 225{,}65$ cm.^{4} Para los dos perfiles tendremos, pues,

$$J = 2\left[J_0 + \frac{F}{2}\left(e + \frac{x}{2}\right)^2\right] = 1047 \text{ cm.}^4,$$

de donde

$$x = 0{,}96 \text{ cm.}$$

368. La descomposición de la carga P en las tres direcciones da un esfuerzo de tracción total en la barra $\overline{DC}$ de valor $S_1 = 3773$ kg., y para cada una de las piezas de madera, una compresión $S_2 = 2631$ kg. La longitud de estas piezas es $l = 658$ cm.

El diámetro del tirante se deduce de la igualdad

$$S_1 = \frac{\pi d^2}{4} k'_t, \text{ de donde } d = 2{,}9 \text{ cm.}$$

Llamando a al lado de la sección cuadrada de las maderas, se tiene, según la fórmula (87),

$$S_2 = \frac{1}{11} F K_k = \frac{a^2}{11} \frac{987\,000}{\lambda^2},$$

en donde

$$\lambda = l/i = l\sqrt{12}/a = 2279/a,$$

y de aquí resulta la ecuación

$$a^4 = \frac{11\,S_2}{987\,000}\,2279^2,$$

y

$$a = 19{,}8 \text{ cm.}$$

Se halla, finalmente, $\lambda = 115$, es decir, > 100, y con esta condición es válida la aplicación de la fórmula (87).

369. a) La carga que actúa en B produce en C una reacción de apoyo $C = 12$ t. Esta se descompone en un esfuerzo de tracción $P = 9$ t. para la viga y uno de compresión $S = 15$ t. para la tornapunta $\overline{CD}$. La viga está, además, sometida a flexión, el máximo momento flector corresponde a C y vale $M_{máx} = 9000$ mkg. La carga máxima de trabajo de la viga será, pues,

$$\frac{M_{máx}}{W} + \frac{P}{F} = 69{,}8 + 5{,}5 = 75{,}3 \text{ at.},$$

siendo

$$W = \frac{1}{6}\,35\cdot 47^2 = 12\,883 \text{ cm.}^3$$

b) Para la tornapunta $\overline{DC}$, la relación $\lambda = l/i = 49{,}4$; según la tabla 4 y la fórmula (94), tendremos

$$\alpha = 0{,}700, \qquad k'_k = \alpha k'_d = 0{,}7\cdot 80 = 56 \text{ at.};$$

por lo tanto, su resistencia (carga total admisible) es

$$F k'_k = 35^2\cdot 56 = 69 \text{ t.},$$

mientras que hemos hallado que la compresión total que absorbe es solamente de 15 t.

c) Los dos pernos han de resistir 9 t. de esfuerzo cortante según la fórmula (48), se tiene

$$\tau_{máx} = 480 = \frac{4}{3}\frac{9000}{F}, \qquad F = \frac{\pi d^2}{4},$$

de donde el diámetro

$$d = 5{,}7 \text{ cm.}$$

370. a) Las reacciones de los apoyos en A y B son $ql/2 = 250$ kg., y el esfuerzo de tracción sobre el hierro redondo $\overline{CB}$, llamando $\measuredangle ABC = \alpha$, es

$$S = A/\text{sen } \alpha.$$

En la ménsula $\overline{AB}$ se produce un esfuerzo de compresión $R = A \text{ ctg } \alpha = 625$ kg., que unido al peso propio $q = 100$ kg./m. solicita la pieza, como en el problema 318. Allí obtuvimos para la flecha máxima en el punto medio de la viga el valor

$$f = \frac{q}{R}\left\{\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{\cos \omega l/2} - 1\right) - \frac{l^2}{8}\right\}, \text{ siendo } \omega = \sqrt{\frac{R}{EJ}}.$$

El m. de i. de la sección de la ménsula para la horizontal que pasa por el c. d. g. es $J = 284$ cm.^{4}, y el c. d. g. dista de la arista superior $e = 3{,}71$ cm. Tendremos, pues,

$$\omega = 0{,}00105 \text{ cm.}^{-1} \quad \text{y} \quad f = 1{,}47 \text{ cm.}$$

El máximo momento flector corresponde al punto medio

$$M = Rl + ql^2/8 = 32\,169 \text{ cmkg.},$$

y los coeficientes de trabajo que resultan para las fibras extremas son: en la arista superior,

$$-M\,e_2/J = -420 \text{ at. (compresión)};$$

en la inferior,

$$+M\,e_1/J = +713 \text{ at. (tracción)}.$$

A ellas hay que añadir la compresión debida a R

$$-R/F = -22 \text{ at.};$$

por lo tanto, la compresión máxima es -442 en la arista superior, y la tracción máxima $+691$ at. en la inferior.

b) La viga $\overline{AB}$ puede peligrar por pandeo. El mínimo m. de i. de la sección (respecto al eje de simetría) es 130 cm.^{4}, de donde el radio de giro $i = 2{,}15$ cm. y la relación $\lambda = l/i = 232$. Según la fórmula (91), la carga de pandeo será

$$K_k = 19\,740\,000/\lambda^2 = 366 \text{ at.};$$

la carga de rotura a pandeo,

$$K_k\,F = 10\,248 \text{ kg.},$$

y el coeficiente de seguridad,

$$\mathfrak{S} = \frac{K_k F}{R} = 16{,}4\,.$$

371. a) Del problema 58 se deduce para la carga de fatiga del hierro dulce con la variación de cargas dada

$$A = 2160 + 1230 \cdot \frac{2}{5} + 250 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 2692 \text{ at.}$$

Como coeficiente de trabajo se puede adoptar, pues, para tracción,

$$k_z' = 2A/7 = 769 \text{ at.},$$

y para esfuerzo cortante, según la fórmula (52),

$$k_s' = \frac{10}{13}\,k_z = 591 \text{ at.}$$

b) De $P = \frac{\pi d^2}{4}\,k_s'$ se deduce

$$d = 2{,}9 \text{ cm.},$$

y de $P\sqrt{2} = \frac{\pi d_1^2}{4}\,k_z'$,

$$d_1 \approx 3{,}5 \text{ cm.}$$

La fuerza $P/\sqrt{2}$ en la barra d_1 determina en las secciones C y A del perno un esfuerzo cortante, y según la fórmula (48) tendremos

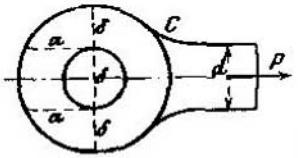
$$P\sqrt{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi \delta^2}{4}\,k_s', \quad \text{de donde} \quad \delta = 4{,}5 \text{ cm.}$$

Del mismo modo para la sección B, puesto que cada lado de la palanca transmite al árbol D la compresión P, se tiene

$$P\sqrt{2} = 2\frac{3}{4}\frac{\pi D^2}{4}k, \text{ (doble sección)},$$

de donde

$$D = 3{,}2 \text{ cm}.$$



c) El cálculo por tracción da la igualdad

$$P = 2b\delta k'_t,$$

de donde

$$b = 0{,}72 \text{ cm.},$$

y por esfuerzo cortante [según la fórmula (47)],

$$P = 2\frac{2}{3}ba k'_s,$$

de donde

$$b = 1{,}0 \text{ cm}.$$

Del mismo modo

$$P\sqrt{2} = 2\frac{2}{3}b_1 a k'_s, \quad b_1 = 1{,}4 \text{ cm}.$$

d)

$$J_{mín} = B^4/12 - 4(J_1 + fe^2),$$

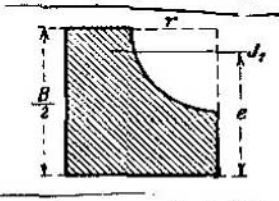
en donde

$$J_1 = r^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)$$

es el m. de i. de un cuadrante de círculo respecto a un eje que pasa por el c. d. g. (según el problema 108),

$$f = \frac{1}{4}r^2\pi \quad \text{el área y} \quad e = \frac{B}{2} - \frac{4r}{3\pi}$$

a distancia del c. d. g. del cuadrante de círculo al eje.



Haciendo $r = aB$, se tiene

$$J = \frac{B^4}{12}[1 + 16a^3 - 3\pi(a^4 + a^2)],$$

y para $a = 0{,}4$ se tiene $J = 0{,}023\ B^4$.

e) El lado $\overline{AB}$ de la palanca está articulado en A y empotrado en B; su longitud reducida será, pues, según la fórmula (85),

$$l_r = 0{,}7\,l = 28 \text{ cm}.$$

El área de la sección es $F = B^2(1 - \pi a^2) = 0{,}5\ B^2$, el radio de giro es

$$i = \sqrt{J/F} = 0{,}215\ B$$

y

$$\lambda = l_r/i = 130/B.$$

Calculando por la fórmula (88) y suponiendo provisionalmente que $\lambda < 80$, se tiene

$$\frac{1}{10}Fk_k = \frac{1}{10}F(7760 - 120\lambda + 0{,}53\lambda^2) = P.$$

Sustituyendo el valor $P = 5000$ kg. (compresión del lado de la palanca) y los valores de F y λ antes hallados, resulta la ecuación

$$7760\, B^2 - 15\,600\, B = 91\,043,$$

de donde

$$B = 4{,}6 \text{ cm.}$$

Como realmente $\lambda = 130/4{,}6 < 80$, puede darse el cálculo por definitivo.

372. a) El máximo momento flector corresponde al punto B, y vale

$$M_B = 6000 \text{ mkg.}$$

y la reacción en el apoyo B vale 7000 kg.

b) Para la elección del perfil normal I hay que tener en cuenta el momento resistente, que vale

$$W = \frac{M_B}{k_b'} = \frac{600\,000}{700} = 857 \text{ cm.}^3$$

Se escoge, pues, un perfil normal n.° 34 con un momento resistente de 923 cm.³ (véase Hütte, 25.ª ed. alemana, pág. 736).

c) La columna debe calcularse por pandeo. De la fórmula de Euler

$$5\,B = 20{,}19\,\frac{E\,J}{l^2}$$

se deduce el momento de inercia necesario para la sección de la columna

$$J = \frac{5\,B\,l^2}{20{,}19\,E} = 277 \text{ cm.}^4$$

El momento de inercia de un anillo circular con la relación de radios 7/8 es

$$J = \frac{\pi}{64}\,(D^4 - d^4) = \frac{0{,}413\pi}{64}\,D^4 = 0{,}02025\,D^4,$$

y de aquí resulta el diámetro exterior

$$D = 10{,}8 \text{ cm.}$$

Calculando según v. Tetmajer, y siendo el área de la sección

$$F = \frac{\pi}{4}\,(D^2 - d^2) = 0{,}1845\,D^2$$

su radio de giro

$$i = \sqrt{J/F} = 0{,}331\,D,$$

y el grado de esbeltez

$$\lambda = \frac{l_r}{i} = \frac{0{,}7\,l}{i} = \frac{845}{D};$$

según la fórmula (88), se tiene

$$K_k = 7760 - 120\,\lambda + 0{,}53\,\lambda^2,$$

y se obtiene D resolviendo la ecuación cuadrática

$$7760\,D^2 - 101\,500\,D + 190\,000 = 0,$$

cuyo resultado es

$$D = 10{,}755 \text{ cm.} \approx 10{,}8 \text{ cm.}$$

(como antes) y

$$d = 7D/8 = 9{,}4 \text{ cm.}$$

---

373. Se tiene $P = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2$. Como la dilatación de ambas barras es la misma, se deduce $\sigma_1/E_1 = \sigma_2/E_2$, siendo E_1, E_2 los coeficientes de elasticidad. De aquí resulta

$$\sigma_1 = \frac{PE_1}{E_1F_1 + E_2F_2}, \quad \sigma_2 = \frac{PE_2}{E_1F_1 + E_2F_2} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{P}{E_1F_1 + E_2F_2}.$$

374. Para las tensiones producidas por la acción de P son, desde luego, válidas las fórmulas del problema anterior. Para el estado inicial, según el enunciado, tenemos

$$F_1\sigma_{01} + F_2\sigma_{02} = 0,$$

y la relación de tensiones impuesta es

$$\frac{\sigma_{01} + \sigma_1}{\sigma_{02} + \sigma_2} = a.$$

De aquí se deduce

$$\sigma_{01} = -\frac{PF_2}{E_1F_1 + E_2F_2}\,\frac{E_1 - aE_2}{aF_1 + F_2},$$

$$\sigma_{02} = \frac{PF_1}{E_1F_1 + E_2F_2}\,\frac{E_1 - aE_2}{aF_1 + F_2}.$$

375. Imagínese el proceso a la inversa, esto es, que el hierro y el hormigón tienen inicialmente las tensiones (que se buscan) σ_{01} y σ_{02}, y que la pieza recibe luego la acción de P, con lo cual se producen las tensiones adicionales σ_1 y σ_2. Al final debe tenerse

$$\sigma_{02} + \sigma_2 = 0$$

y, además,

$$\sigma_{01} + \sigma_1 = P/F_1.$$

Uniendo a estas ecuaciones las dos siguientes

$$F_1\sigma_{01} + F_2\sigma_{02} = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_1/E_1 = \sigma_2/E_2,$$

se obtienen las tensiones buscadas

$$\sigma_{01} = \frac{P}{F_1}\,\frac{E_2F_2}{E_1F_1 + E_2F_2}, \quad \sigma_{02} = -\frac{PE_2}{E_1F_1 + E_2F_2}.$$

376. De $F_1\sigma_{01} = F_2\sigma_{02} = 0$ se deduce primeramente para la tensión inicial del hormigón

$$\sigma_{02} = -9 \text{ at.}$$

Siendo σ_1 y σ_2 las tensiones que produce la acción de P, se tiene

$$P = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 \quad \text{y} \quad \sigma_1/E_1 = \sigma_2/E_2,$$

de donde

$$P = \sigma_1(E_1F_1 + E_2F_2)/E_1,$$

y haciendo

$$\sigma_1 = -270 \text{ at. resulta } P = -2700 \text{ kg.}$$

377. Desde luego debe cumplirse la siguiente condición de equilibrio:

compresión en el hierro = tracción en el hormigón,

o sea

$$\sigma_c F_c = \sigma_b F_b.$$

Además, han de verificarse las siguientes relaciones elásticas entre la tensión σ y la dilatación ε (el subíndice e indica hierro; el b, hormigón)

$$\sigma_e = \varepsilon_e E_e,$$

$$\sigma_{bz} = \varepsilon_b E_{bz} = (\varepsilon_z - \varepsilon_e) E_{bz},$$

puesto que evidentemente

$$\varepsilon_b = \varepsilon_z - \varepsilon_e.$$

Sustituyendo en la ecuación estática, se tiene

$$\varepsilon_e E_e F_e = (\varepsilon_z - \varepsilon_e) E_{bz} F_b,$$

de donde

$$\varepsilon_e = \varepsilon_z \frac{1}{1 + \gamma\varphi},$$

y la tensión

$$\sigma_e = \varepsilon_e E_e = E_e \varepsilon_z \frac{1}{1 + \gamma\varphi}.$$

Del mismo modo en el hormigón

$$\sigma_{bz} = E_{bz}(\varepsilon_z - \varepsilon_e) = E_z \varepsilon_z \frac{\varphi}{1 + \gamma\varphi} = \varphi\sigma_e.$$

Con los datos numéricos resulta

$$\sigma_e \approx 128 \text{ at.}, \quad \sigma_{bz} \approx 1{,}01 \text{ at.}$$

378. La dilatación inicial ε_a en el hierro debida a P debe ser igual al coeficiente de contracción ε_z del hormigón, es decir,

$$\varepsilon_a = \varepsilon_z,$$

de donde

$$P = F_e \sigma_e = \varepsilon_z E_e F_e.$$

379. La solución se obtiene teniendo en cuenta la siguiente condición: La diferencia entre la dilatación inicial debida a P y la que queda después del proceso, ambas para el hierro, ha de ser igual a la diferencia entre la contracción ε_z y la dilatación final ε_b del hormigón. O sea, expresando dicha igualdad algebraicamente,

$$\varepsilon_a - \varepsilon_e = \varepsilon_z - \varepsilon_b.$$

Añadiendo la ecuación de equilibrio del cuerpo fraguado y descargado

$$\varepsilon_e E_e F_e = -\varepsilon_b E_b F_b$$

se obtiene, eliminando ε_e y teniendo en cuenta que

$$\varepsilon_a = \frac{P}{E_e F_e},$$

la ecuación

$$\varepsilon_b = \left(\varepsilon_z - \frac{P}{E_e F_e}\right) \frac{\gamma\varphi}{1 + \gamma\varphi}$$

y, por lo tanto, la tensión buscada

$$\sigma_b = E_b \varepsilon_b = E_e \left(\varepsilon_z - \frac{P}{E_e F_e}\right) \frac{\varphi}{1 + \gamma\varphi};$$

γ y φ tienen la significación que se les dió en el problema 377.

380. Sea Δl el acortamiento que se busca, cuando no hay armadura. La magnitud $\Delta l - \delta l$ mide el efecto del hierro. La armadura desarrolla un esfuerzo de tracción

$$E_1 F_1 \delta l / l,$$

y el hormigón una compresión

$$E_2 F_2 (\Delta l - \delta l)/l.$$

Igualando ambas, se halla

$$\Delta l = \delta l \left(1 + \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2}\right).$$

381. Se halla el momento de inercia polar respecto al centro y se toma la mitad ; y así se tiene

$$J = \frac{1}{4} \pi R^4 + \frac{7}{8} \pi \nu r^2 \delta^2.$$

382. Como antes. Resulta $J = \frac{5}{16} a^4 \sqrt{3} + \frac{3}{4} \pi \nu r^2 \delta^2.$

383. $J_1 = \frac{1}{12} B H^3 + \pi \nu a^2 \delta^2, \quad J_2 = \frac{1}{12} B^3 H + \frac{3}{8} \pi \nu b^2 \delta^2.$

384. Para el sistema de ejes coordenados aOa los m. de i. y centrífugo son :

$$J_x = J_y = \frac{b}{3} (a^3 + a b^2 - b^3) + \frac{1}{8} \pi \nu \delta^2 [5 a^2 - 8 e (a + b) + 4 b^2 + 14 e^2],$$

$$J_{xy} = \frac{b^2}{4} (2 a^2 - b^2) + \frac{1}{4} \pi \nu \delta^2 (3 a b - 2 b e + e^2).$$

Los ejes principales para el punto O están inclinados 45° respecto a los ejes aOa; los m. de i. principales serán, según la fórmula (35),

$$J_1' = J_x + J_{xy}, \quad J_2' = J_x - J_{xy}.$$

Para hallar el c. d. g. virtual de la sección se utilizan las ecuaciones

$$F = b (2a - b) + 9 \pi \nu \delta^2 / 4,$$

$$F x_s = F y_s = b (a^2 + a b - b^2)/2 + \pi \nu \delta^2 (3 a + 2 b - e)/4.$$

Los m. de i. principales buscados para el c. d. g. son

$$J_1 = J_1', \quad J_2 = J_1' - 2 F x_s^2.$$

385. Sea y_0 la distancia de la fibra neutra al trasdós o borde de compresión ; la sección que se cuenta para el cálculo es

$$F = B y_0 + \nu (f_1 + f_2)$$

y

$$F y_0 = B y_0^2 / 2 + \nu (f_1 h_1 + f_2 h_2).$$

El m. de i. para la arista comprimida es

$$J = B y_0^3 / 3 + \nu (f_1 h_1^2 + f_2 h_2^2).$$

Sin embargo, si de las dos primeras ecuaciones resultase $y_0 > h$, en su lugar se utilizarán las ecuaciones

$$F = (B - b) h + b y_0 + \nu (f_1 + f_2),$$

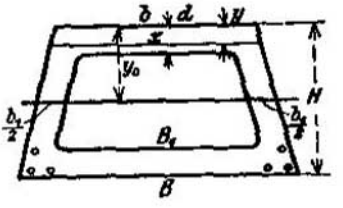
$$F y_0 = (B - b) h^2 / 2 + b y_0^2 / 2 + \nu (f_1 h_1 + f_2 h_2),$$

$$J = (B - b) h^3 / 3 + b y_0^3 / 3 + \nu (f_1 h_1^2 + f_2 h_2^2).$$

Finalmente, el m. de i. para la fibra neutra es

$$J_0 = J - F y_0^2.$$

386. Sea f la sección de la armadura y h su distancia media al trasdós de la sección; prescindiendo de los chaflanes redondeados en los vértices, la sección de cálculo es



$$F = \int_0^d x\,dy + b_1(y_0 - d) + \nu f$$

$$= \frac{B-b}{H}\frac{d^2}{2} + bd + b_1(y_0 - d) + \nu f.$$

Del mismo modo resulta

$$F y_0 = \int_d^d xy\,dy + b_1\int_0^{y_0} y\,dy + \nu f h$$

$$= \frac{B-b}{H}\frac{d^3}{3} + b\frac{d^2}{2} + \frac{b_1}{2}(y_0^2 - d^2) + \nu f h$$

y el m. de i. para la arista superior de la sección

$$J = \frac{B-b}{H}\frac{d^4}{4} + b\frac{d^3}{3} + \frac{b_1}{3}(y_0^3 - d^3) + \nu f h^2,$$

siendo

$$b_1 = B - B_1 - \frac{(B-b)\,d}{H}.$$

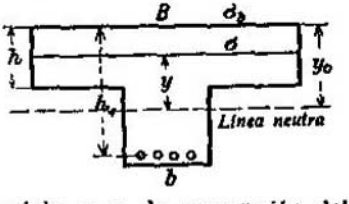
387. Sea f la sección de los hierros y J_s su m. de i. referido a la horizontal que pasa por el c. de g.; se tiene

$$F = B y_0 + \nu f,$$

$$F y_0 = B y_0^2/2 + \nu f h,$$

$$J = B y_0^3/3 + \nu (f h^2 + J_s).$$

388. Primeramente se calcula la profundidad de la fibra neutra como en el problema 386, haciendo $f_2 = 0$.



La compresión total en la sección vale

$$D = \int_{y_0-h}^{y_0} \sigma\,dF_1 + \int_0^{y_0-h} \sigma\,dF_2,$$

en donde $\sigma = \sigma_b y/y_0$, $dF_1 = B\,dy$, $dF_2 = b\,dy$ y σ_b la compresión del hormigón en el borde o trasdós.

Sea η la distancia de la fibra neutra al centro de compresión; se tiene

$$D\eta = \int_{y_0-h}^{y_0} \sigma y\,dF_1 + \int_0^{y_0-h} \sigma y\,dF_2.$$

De aquí resulta

$$\eta = \frac{2}{3}\,\frac{B y_0^3 - (B-b)(y_0-h)^3}{B y_0^2 - (B-b)(y_0-h)^2}$$

y para la distancia buscada el valor $h_1 - y_0 + \eta$.

389. Sea df un elemento de la armadura, σ_1 su tensión, y_1 su distancia a la fibra neutra; el momento flector M se equilibrará con las tensiones cuando

$$M = \int_0^{y_0} B\sigma y\,dy + \int_{(f)} \sigma_1 y_1\,df.$$

Ahora bien:

$$\sigma = \sigma_b y/y_0, \quad \sigma_1 = \nu\sigma_b y_1/y_0,$$

de donde

$$M = \frac{\sigma_b}{y_0}\left[\frac{1}{3}By_0^3 + \nu J_e + \nu f(h - y_0)^2\right].$$

Como, además,

$$\frac{\sigma_e}{\nu} : \sigma_b = (h_1 - y_0) : y_0,$$

en donde h_1 es la distancia del borde superior de la pieza al inferior de la armadura; el incremento del momento flector debido a la rigidez de la armadura vale, pues,

$$\frac{\sigma_e}{h_1 - y_0} J_e.$$

390. La sección virtual o de cálculo vale

$$F = BH + \nu(f_1 + f_2),$$

y para la distancia y_s del c. d. g. virtual al canto izquierdo, tenemos la condición

$$Fy_s = BH^2/2 + \nu(f_1h_1 + f_2h_2).$$

El m. de i. para el canto izquierdo es

$$J = BH^3/3 + \nu(f_1h_1^2 + f_2h_2^2),$$

y para la paralela a dicho canto que pasa por el c. d. g.,

$$J_s = J - Fy_s^2.$$

La fibra neutra ha de caer en el canto izquierdo; por lo tanto, según la fórmula (66) se tendrá $n = y_s$, $np = J_s/F$ (prescindiendo del signo) y

$$p = J/Fy_s.$$

391. La fibra neutra debe ser tangente a la circunferencia exterior. Aplicando la fórmula (66) se tiene

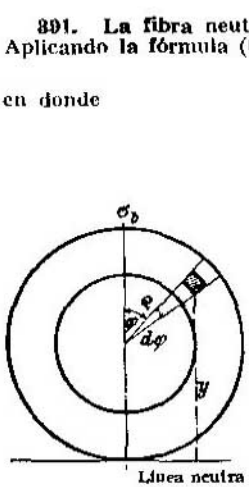
$$p = -i^2/n,$$

en donde

$$n = R_2, \quad i^2 = J/F,$$

$$J = \frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4) + \frac{1}{2}\nu f R^2,$$

$$F = \pi(R_2^2 - R_1^2) + \nu f.$$



392. Llamando σ a la tensión en el elemento superficial $dF = \varrho\,d\varrho\,d\varphi$ del hormigón, se tiene

$$\sigma : \sigma_b = y : 2R_2 \quad \text{e} \quad y = R_2 + \varrho\cos\varphi.$$

La compresión total que debe absorber el hormigón es

$$P_b = \int_{(F)} \sigma\,dF = \frac{\sigma_b}{2R_2}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}(R_2 + \varrho\cos\varphi)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi$$

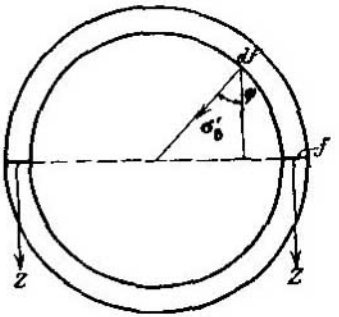
$$= \pi(R_2^2 - R_1^2)\,\sigma_b/2 = \sigma_b F/2.$$

Del mismo modo se halla el esfuerzo de compresión que absorbe el hierro, el cual siendo $df = f\,d\varphi/2\pi$, valdrá

$$P_e = \int \sigma\,df = \frac{\sigma_b \cdot f}{4\pi R_2}\,\nu \int_0^{2\pi} (R_2 + R\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{\nu\sigma_b f}{2},$$

en donde $\nu = E_e/E_{bd}$. Por lo tanto, la compresión máxima del hormigón es

$$\sigma_b = \frac{2P}{F + \nu f}.$$



393. Si ε es la contracción unitaria del hormigón en la dirección axial de la columna,

$$\varepsilon' = \varepsilon/m$$

será la dilatación transversal, cuando se prescinde del zunchado. El anillo hace que esta dilatación sea menor y quede reducida a ε'_1; el resto ε'_2 representa la coacción que ejerce el anillo.

El primer sumando ε'_1 supone una dilatación del anillo, y como el contorno se dilata igual que el diámetro, la tensión del hierro será $\sigma_e = E_e\varepsilon'_1$. Llamando f a la sección del anillo, el esfuerzo Z de tracción que sufre vendrá dado por la igualdad

$$2Z = 2f\sigma_e.$$

El segundo sumando $\varepsilon'_2 = \varepsilon' - \varepsilon'_1$ representa la coacción ejercida por la presión del anillo; en el elemento dF del contorno de la columna su valor es σ'_b; para que haya equilibrio es preciso que $2Z = \int \sigma'_b \cos\varphi\,dF = \sigma'_b l d$. Escribiendo ahora

$$\sigma_b = E_b\varepsilon, \quad \sigma'_b = E'_b\varepsilon'_2,$$

se tiene

$$\sigma_e = \frac{\sigma_b}{m}\,\frac{1}{\dfrac{2f}{ld}\,\dfrac{E_b}{E'_b} + \dfrac{E_b}{E_e}},$$

y del mismo modo

$$\sigma'_b = \frac{\sigma_b}{m}\,\frac{1}{\dfrac{ld}{2f}\,\dfrac{E_b}{E_e} + \dfrac{E_b}{E'_b}}.$$

394. Sean M'_t, M''_t las componentes del momento de torsión M_t que absorben la madera y el hierro, respectivamente, y G' y G'' los coeficientes de elasticidad transversales respectivos; el ángulo de giro por unidad de longitud de la viga valdrá, según la fórmula (63),

$$\vartheta = \frac{M'_t}{\eta_3 b^3 h G'}.$$

Para un trozo elemental de hierro dx el giro vale

$$r\,d\varphi = \gamma\,dx = \tau\,dx/G'',$$

siendo τ la tensión tangencial y γ el deslizamiento o distorsión.

Como $d\varphi : dx = \vartheta : 1$, resulta

$$\tau = G''r\vartheta.$$

y el momento torsor de los dos hierros es

$$M_t'' = 2f\tau r = 2fr^2G''\vartheta.$$

Igualando los dos valores de ϑ, se deduce

$$\frac{M_t''}{2fr^2G''} = \frac{M_t'}{\eta_3 b^3 h G'}$$

y de aquí

$$\frac{M_t''}{M_t'} = \frac{2fr^2}{\eta_3 b^3 h}\frac{G''}{G'},$$

a la que hay que añadir la ecuación

$$M_t = M_t' + M_t'',$$

de donde se determinan fácilmente M_t' y M_t''.

395. Sea ϱ la distancia de un punto al eje, la ley lineal de variación de E es

$$E = E_1 + (E_2 - E_1)\,\varrho/r = a + b\varrho.$$

Para $\varrho = 0$, $E = E_1$; para $\varrho = r$, $E = E_2$. La dilatación ε debida a la fuerza P es igual en todos los puntos; por lo tanto, la tensión $\sigma = E\varepsilon$ será variable.

Haciendo

$$P = \int_0^r \sigma\, dF,$$

y

$$dF = 2\pi\varrho\, d\varrho \text{ (elemento de área anular)},$$

$$\sigma = \varepsilon(a + b\varrho),$$

se tiene

$$P = \pi r^2\varepsilon\,(a + 2br/3),$$

y como la carga admisible k_2' se alcanza primeramente en el borde

$$\varepsilon = k_2/E_2,$$

de donde

$$P = \frac{Fk_2}{3}\left(2 + \frac{E_1}{E_2}\right),$$

siendo F el área del alambre.

396. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos secciones de la barra a la distancia ds; después de la deformación la sección $\overline{CD}$ toma la posición $\overline{C'D'}$ (llevando $\overline{AB}$ a su primitiva posición) y el giro relativo $d\varepsilon$ vale

$$d\varepsilon = \frac{\overline{AC'} - \overline{BD'}}{2e}.$$

Ahora bien:

$$\overline{CC'} = \frac{\sigma_0}{E_0(1+a)}\,ds,$$

$$\overline{DD'} = \frac{\sigma_0}{E_0(1-a)}\,ds$$

son los acortamientos en las fibras extremas para $z = +e$ y $z = -e$, de donde

$$d\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0}\,\frac{a}{1-a^2}\,\frac{ds}{e};$$

además,

$$ds' = \overline{MN'} = \overline{MN} - \overline{N'N} = (1 - \sigma_0/E_t)\, ds,$$

y el radio de curvatura de la línea elástica en el punto M es

$$\varrho = \frac{ds'}{d\varepsilon} = \left(\frac{E_0}{\sigma_0} - 1\right) \frac{e\,(1 - a^2)}{a}.$$

Puesto que esta expresión tiene el mismo valor para todas las secciones, la línea elástica es un arco de circunferencia de radio ϱ.

397. Siendo σ la tensión en el elemento cualquiera de área dF, se deben verificar las ecuaciones

$$\int \sigma dF = 0, \quad \int \sigma z dF = M.$$

Si ε es la dilatación en dF y ε_0 en el c. d. g., y ϱ es el radio de curvatura de la línea elástica, se tiene

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{z}{\varrho}, \quad \sigma = E\varepsilon = E_0\left(1 + a\frac{z}{e}\right)\left(\varepsilon_0 + \frac{z}{\varrho}\right) \tag{a}$$

y sustituyendo en las integrales de arriba

$$\varepsilon_0 F + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{a\varepsilon_0}{e}\right)\int z dF + \frac{a}{e\varrho}\int z^2 dF = 0,$$

$$\varepsilon_0 \int z dF + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{a\varepsilon_0}{e}\right)\int z^2 dF + \frac{a}{e\varrho}\int z^3 dF = \frac{M}{E_0}.$$

Ahora bien: $\int z dF = 0, \int z^2 dF = J$, y para la sección simétrica $\int z^3 dF = 0$; luego

$$\varepsilon_0 F + \frac{aJ}{e\varrho} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{a\varepsilon_0}{e}\right) J = \frac{M}{E_0}. \tag{b}$$

Haciendo $J = Fi^2$, se obtiene para la dilatación en el c. d. g.

$$\varepsilon_0 = -\frac{ai^2}{e\varrho},$$

y sustituyendo esta expresión en la fórmula (b)

$$\frac{E_0}{\varrho} = \frac{M}{J}\,\frac{e^2}{e^2 - a^2 i^2}.$$

La tensión en el c. d. g. para $z = 0$ es, pues,

$$\sigma_0 = E_0\varepsilon_0 = -\frac{M}{J}\,\frac{aei^2}{e^2 - a^2 i^2},$$

y el lugar de los puntos de carga nula ($\sigma = 0$)

$$\varepsilon_0 + \frac{z_1}{\varrho} = 0 \quad \text{o bien} \quad z_1 = \frac{ai^2}{e},$$

esto es, una paralela al eje a la distancia z_1. Finalmente, las tensiones en las fibras extremas son:

para $z = +e$, $\qquad \sigma_1 = \dfrac{M}{J}\,\dfrac{(1 + a)(e^2 - ai^2)}{e^2 - a^2 i^2}$;

para $z = -e$, $\qquad -\sigma_2 = -\dfrac{M}{J}\,\dfrac{(1 - a)(e^2 + ai^2)}{e^2 - a^2 i^2}$.

398. Siendo dF un elemento de área, sometido a compresión, z su distancia a la fibra neutra y σ la compresión, se verificarán las ecuaciones

$$P = \int_0^e \sigma\, dF, \quad P(e - a) = \int_0^e \sigma z\, dF,$$

$$\sigma = z\sigma_{\text{máx}}/e.$$

Como las integrales sólo se extienden a la zona comprimida, es decir, a la zona que cae debajo de la fibra neutra NN, se tiene

$$\int_0^e z\, dF = \frac{1}{2}\, b e^2, \quad \int_0^e z^2 dF = \frac{1}{3}\, b e^3,$$

de donde

$$e = 3a \quad \text{y} \quad \sigma_{\text{máx}} = \frac{2P}{3ab}.$$

399. Solución como en el problema anterior. Se tiene

$$\int_0^e z\, dF = 2s^2(e - s) + \frac{1}{3}(2s - e)^2,$$

$$\int_0^e z^2 dF = \frac{s^4}{3} + 2s^2(e - s)^2 - \frac{1}{6}(2s - e)^4.$$

Se considera como área activa a la diferencia entre el cuadrado y el triángulo que está por encima de la línea neutra.

Haciendo $z = e/s$, se tiene la ecuación

$$z^3 - 5z^2 + 6z - 2 = 0,$$

cuya raíz utilizable es $z = 1$, de donde $e = s$

y

$$\sigma_{\text{máx}} = 3P/s^2.$$

400. Solución parecida a la de los dos problemas anteriores. Se tiene

$$P = \int_0^e \sigma\, dF \quad \text{y} \quad P(p + r\cos\alpha) = \int_0^e \sigma z\, dF;$$

siendo

$$\sigma = \frac{z}{e}\sigma_{\text{máx}},$$

se deduce

$$P = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{e}\int_0^e z\, dF \quad \text{y} \quad P(p + r\cos\alpha) = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{e}\int_0^e z^2 dF,$$

de donde

$$p + r\cos\alpha = \frac{\int_0^e z^2 dF}{\int_0^e z\, dF}.$$

Según el problema 117, tendremos

$$\int_0^c z^2 dF = r^4 \left[(\pi - \alpha) \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{4} \right) + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{6} \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \right];$$

además,

$$\int_0^c z dF = r^3 \left[(\pi - \alpha) \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \right],$$

de donde resulta, finalmente,

$$p = \frac{r}{4} \frac{3(\pi - \alpha) + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha (3 + 2 \operatorname{sen}^2 \alpha)}{3(\pi - \alpha) \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha (3 - \operatorname{sen}^2 \alpha)}.$$

401. Para el equilibrio entre las tracciones y las compresiones en la viga de ancho B debe verificarse la ecuación

$$B y_0 \sigma_d / 2 = B (H - y_0) \sigma_z / 2,$$

en donde

$$\sigma_d = E_{bd} \varepsilon_d, \quad \sigma_z = E_{bz} \varepsilon_z$$

son las tracciones y compresiones de las fibras extremas.

Haciendo $E_{bz}/E_{bd} = \mu$ y observando que

$$\varepsilon_z : \varepsilon_d = (H - y_0) : y_0,$$

se halla

$$y_0 = H \frac{\sqrt{\mu}}{1 + \sqrt{\mu}}.$$

402. El equilibrio entre las compresiones y tracciones da la igualdad

$$\int_0^{y_0} B \sigma_1 dy_1 = \int_0^{H - y_0} B \sigma dy.$$

Con ayuda de las ecuaciones de Bach y de las relaciones

$$\varepsilon_1 : \varepsilon_b = y_1 : y_0, \quad \varepsilon : \varepsilon_b = y : y_0,$$

$$\sigma_b^{m_1} = E_{bd} \varepsilon_b$$

se obtiene, finalmente, la expresión

$$\frac{H}{y_0} - 1 = \sqrt[m+1]{\frac{E_{bd}}{E_{bz}} \left[\frac{m_1 (1 + m)}{m (1 + m_1)} \right]^m \sigma_b^{m - m_1}}.$$

403. Con las notaciones $\nu = \frac{E_e}{E_{bd}}$, $\mu = \frac{E_{bz}}{E_{bd}}$, el área de la sección virtual es

$$F = B y_0 + \mu B (H - y_0) + \nu f$$

y

$$F y_0 = B y_0^2 / 2 + \mu B (H^2 - y_0^2) / 2 + \nu f h,$$

siendo y_0 la distancia de la fibra neutra a la comprimida del trasdós.

El m. de i. de la tracción virtual para la fibra neutra es

$$J_0 = B y_0^3 / 3 + B (H - y_0)^3 / 3 + \nu f (h - y_0)^2,$$

y la compresión máxima en el hormigón,

$$\sigma_{bd} = M y_0 / J_0.$$

404. Notaciones como en el problema anterior.

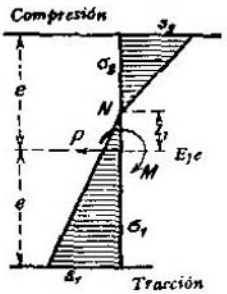
$$F = (B - b)h + by_0 + \mu b(H - y_0) + \nu(f_1 + f_2),$$
$$Fy_0 = (B - b)h^2/2 + by_0^2/2 + \mu b(H^2 - y_0^2)/2 + \nu(f_1h_1 + f_2h_2),$$
$$J_0 = By_0^3/3 - (B - b)(y_0 - h)^3/3 + \mu b(H - y_0)^3/3 + \nu[f_1(h_1 - y_0)^2 + f_2(y_0 - h_2)^2].$$

Compresión máxima, $\sigma_{bd} = \dfrac{My_0}{J_0}$.

Tracción máxima, $\sigma_{bz} = \mu\dfrac{M(H - y_0)}{J_0}$.

Trabajo máximo del hierro, $\sigma_s = \nu\dfrac{M(h_1 - y_0)}{J_0}$.

405. La figura representa el esquema de tracciones y compresiones de una sección: N es la fibra neutra; z_1, su distancia al eje de la viga (que debo hallarse); $\sigma_{1máx}$ y $\sigma_{2máx}$ son las tensiones máximas en las fibras extremas s_1 y s_2 en el intradós (tracción) y trasdós (compresión) de la viga.



Siendo b la anchura del rectángulo, $b\,dz$ un elemento de superficie a la distancia z de la fibra neutra, σ_1 la tracción en el mismo y σ_2 la compresión, tendremos las siguientes ecuaciones:

$$P = \int_0^{e+z_1} b\sigma_1 dz - \int_0^{e-z_1} b\sigma_2 dz,$$

$$M + Pz_1 = \int_0^{e+z_1} bz\sigma_1 dz + \int_0^{e-z_1} bz\sigma_2 dz.$$

Haciendo

$$\sigma_1 = \sigma_{1máx}\frac{z}{e + z_1}, \quad \sigma_2 = \sigma_{2máx}\frac{z}{e - z_1},$$

las ecuaciones anteriores toman la forma

$$2P/b = \sigma_{1máx}(e + z_1) - \sigma_{2máx}(e - z_1),$$
$$3(M + Pz_1)/b = \sigma_{1máx}(e + z_1)^2 + \sigma_{2máx}(e - z_1)^2.$$

A ellas hay que añadir la relación

$$\frac{\sigma_{1máx}}{\sigma_{2máx}} = \frac{E_1}{E_2}\frac{e + z_1}{e - z_1}.$$

De estas tres ecuaciones se deduce primeramente la siguiente para determinar z_1

$$\frac{3M - P(2e - z_1)}{3M + P(2e + z_1)} = \frac{E_2}{E_1}\left(\frac{e - z_1}{e + z_1}\right)^2;$$

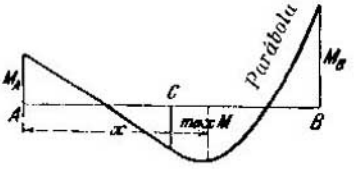
luego las tensiones máximas son

$$\sigma_{1máx} = \frac{3M + P(2e + z_1)}{bh(e + z_1)}$$

y

$$-\sigma_{2máx} = -\frac{3M - P(2e - z_1)}{bh(e - z_1)}.$$

406. Las fuerzas y momentos de empotramiento son los de la tabla 2, número 3, sustituyendo P, a, b, por $Q\,d\xi$, ξ, y $l-\xi$ e integrando a lo largo de ξ. De esta manera se tiene



$$A = \frac{q}{l^3}\int_{l/2}^{l}(l-\xi)^2(2\xi+l)\,d\xi = \frac{3}{32}ql,$$

$$B = \frac{q}{l^3}\int_{l/2}^{l}\xi^2(3l-2\xi)\,d\xi = \frac{13}{32}ql,$$

$$M_A = \frac{q}{l^3}\int_{l/2}^{l}\xi(l-\xi)^2\,d\xi = \frac{5}{192}ql^2, \qquad M_B = \frac{q}{l^3}\int_{l/2}^{l}\xi^2(l-\xi)\,d\xi = \frac{11}{192}ql^2.$$

Puntos de inflexión: corresponden a los puntos de momento nulo. En el trozo $\overline{AC}$ son

$$M = -M_A + Ax = 0,$$

de donde resulta para la abscisa del punto de inflexión el valor

$$x_0 = \frac{M_A}{A} = \frac{5l}{18} = 0{,}278\,l.$$

Para el trozo $\overline{CB}$ tenemos

$$M = -M_A + Ax - \frac{q}{2}(x-l/2)^2 = 0,$$

y para determinar la abscisa x_1 del punto de inflexión, tendremos la ecuación

$$x_1^2 - \frac{19}{16}lx_1 + \frac{29}{96}l^2 = 0,$$

de la cual solamente es utilizable la raíz

$$x_1 = 0{,}818\,l.$$

Derivando la ec. (a) con respecto a x e igualando a cero, se tiene

$$\frac{dM}{dx} = A - q\left(x - \frac{l}{2}\right) = 0,$$

de donde se deduce la abscisa correspondiente al momento máximo entre apoyos

$$x = \frac{l}{2} + \frac{A}{q} = \frac{19}{32}l = 0{,}594\,l,$$

y el valor del momento correspondiente es

$$M_{máx} = -M_A + \frac{Al}{2} + \frac{A^2}{2q} = \frac{155}{6144}ql^2.$$

De todas maneras el momento mayor en valor absoluto es el M_B del empotramiento izquierdo (¡pero no es un máximo analítico!)

407. Supongamos que $a > b$. La flecha máxima se produce entre el apoyo A y la fuerza aislada. La reacción del apoyo en A es, según la tabla 2, número 3,

$$A = P\frac{b^2(3a+b)}{l^3} + \frac{1}{2}ql,$$

y el momento de empotramiento en A,

$$M_A = P\frac{ab^2}{l^2} + \frac{1}{12}ql^2.$$

El momento flector a una distancia cualquiera x de A vale en el trozo indicado

$$M = -M_A + Ax - qx^2/2.$$

La ecuación de la línea elástica es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{1}{EJ}\left(-M_A + Ax - \frac{1}{2}qx^2\right)$$

e integrando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EJ}\left(-M_Ax - \frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{6}qx^3\right) + C.$$

La constante C de integración es nula, puesto que $\frac{dy}{dx} = 0$ para $x = 0$.

Para la sección de máxima flecha se tiene $\frac{dy}{dx} = 0$ y la ecuación

$$-M_A + Ax/2 - qx^2/6 = 0,$$

de donde se deduce para determinar x la ecuación

$$x^2 - 3x\left[\frac{1}{2} + \frac{P}{q}\frac{b^2(3a+b)}{l^3}\right] + \frac{l^2}{2} + \frac{6P}{q}\frac{ab^2}{l^2} = 0.$$

408. Según la tabla 2, número 3, la reacción en el apoyo izquierdo vale

$$A = \frac{P_1}{l^3}(l-a)^2(2a+l) + \frac{P_2}{l^3}a^2(3l-2a).$$

y el momento de empotramiento izquierdo,

$$M_A = \frac{P_1}{l^2}a(l-a)^2 + \frac{P_2}{l^2}a^2(l-a).$$

El momento flector en la sección donde actúa P_1 es

$$-M_A + Aa = 0,$$

de lo cual se deduce

$$P_2 = P_1\frac{2(l-a)^2}{l^2 - 4al + 2a^2}.$$

409. Lo mismo que en el problema 406 se tiene

$$M_A = M_B = \frac{q}{l^2}\int_{l/3}^{2l/3}\xi^2(l-\xi)d\xi = \frac{13}{324}ql^2,$$

y por razones de simetría,

$$A = B = ql/6.$$

En el punto medio de la viga, el momento flector vale

$$M_{máx} = -M_A + A\frac{l}{2} - \frac{1}{2}\frac{ql}{6}\frac{l}{6} = \frac{19}{648}ql^2.$$

Los momentos de empotramiento son los mayores en valor absoluto. La viga se calcula, pues, tomándolos como base del cálculo.

Las secciones de la viga en las cuales son nulas las tensiones normales corresponden a los puntos de inflexión o de momento nulo; tendremos, pues,

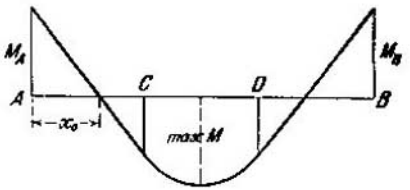
$$M = 0,$$

o sea para el trozo $\overline{AC}$

$$-M_A + Ax_0 = 0,$$

y, por lo tanto,

$$x_0 = \frac{M_A}{A} = \frac{13}{54}l = 0{,}241\,l.$$



El otro punto de inflexión es simétrico del anterior.

410. La ordenada q de la línea de carga, a la distancia ξ de A es $2Q\xi/l$. Procediendo del mismo modo que en el problema **406**, se tiene

$$A = \frac{1}{l^3}\int_0^l q(l-\xi)^2(2\xi+l)\,d\xi = \frac{3}{10}Q,$$

$$B = \frac{1}{l^3}\int_0^l q\xi^2(3l-2\xi)\,d\xi = \frac{7}{10}Q,$$

$$M_A = \frac{1}{l^2}\int_0^l q\xi(l-\xi)^2\,d\xi = \frac{1}{15}Ql, \qquad M_B = \frac{1}{l^2}\int_0^l q\xi^2(l-\xi)\,d\xi = \frac{1}{10}Ql.$$

El momento flector a una distancia cualquiera x de A es

$$M = -M_A + Ax - Qx^3/3l.$$

Haciendo $M = 0$ resulta para las abscisas de los puntos de inflexión la ecuación

$$x_0^3 - 0{,}9x_0l^2 + 0{,}2l^3 = 0,$$

cuyas raíces utilizables (positivas) son

$$x_0 = 0{,}237\,l, \qquad x_0 = 0{,}808\,l.$$

Haciendo, en cambio, $\frac{dM}{dx} = 0$ hallaremos la abscisa correspondiente al momento flector máximo entre apoyos

$$x^2 = Al^2/Q, \qquad x = \sqrt{0{,}3}\,l = 0{,}5477\,l,$$

y el valor de este momento será

$$M_{máx} = -M_A + \frac{2}{3}Ax = 0{,}0429\,Ql.$$

La viga debe calcularse para el momento mayor, que es el de empotramiento en B, y que vale $M_B = Ql/10$.

411. Si la viga ha de poder considerarse como empotrada en B, el momento en este punto, según la tabla 2, n.° 2, ha de valer $Ql/8$; igualando este valor a Pa, resulta

$$a = Ql/8P = 0{,}39 \text{ m.};$$

el máximo momento flector de la viga corresponde a B

$$M_{máx} = Ql/8 = 703{,}13 \text{ mkg.}$$

Las reacciones de los apoyos son

$$A = Q/2 + P(1 + a/l) = 3205{,}8 \text{ kg.},$$

$$B = Q/2 - Pa/l = 844{,}2 \text{ kg.}$$

412. Según la tabla 2, número 3, el momento de empotramiento es

$$M_A = \frac{1}{l^2} \Sigma P a b^2 = 425 \text{ mkg.},$$

y el momento flector en el punto medio D de la viga es

$$M_D = -M_A + 500 \cdot 2 - 300 \cdot 1 = 275 \text{ mkg.},$$

puesto que, siendo la carga total de la viga simétrica, la reacción en A valdrá la mitad, es decir, 500 kg. Haciendo

$$M_{máx} = k_b' W,$$

resulta

$$42\,500 = 50 \frac{1}{12} h^3,$$

de donde

$$h = 21{,}7 \text{ cm.}, \qquad b = 10{,}9 \text{ cm.}$$

413. El momento flector máximo existe en el apoyo próximo a la fuerza solicitante, y vale, según la tabla 2, núms. 3 y 4,

$$M_{máx} = P \frac{a b^2}{l^2} + \frac{1}{12} q l^2.$$

La carga debida al peso propio vale

$$q = \gamma F = 46{,}37 \cdot 0{,}0078 = 0{,}3617 \text{ kg./cm.}$$

Resulta, por lo tanto,

$$M_{máx} = 36{,}992\, P + 1883{,}85 \text{ [kg./cm.]}$$

El m. de i. de la sección para la horizontal que pasa por el centro de gravedad es:

$$J = 4288 \text{ cm.}^4$$

De

$$M_{máx} = k_b J/e$$

se obtiene, siendo $e = 12$ cm.,

$$P = 9608{,}8 \text{ kg.}$$

La flecha debida a la carga total P es, según la tabla 2, n.° 3,

$$f_1 = \frac{P a^2 b^2}{3 E J l^2} = 0{,}0601 \text{ cm.}$$

La deformación bajo la fuerza P debida al peso propio vale, según la tabla 2, número 4,

$$f_2 = \frac{q a^2 b^2}{24 E J} = 0{,}0003 \text{ cm.};$$

por lo tanto, la flecha total será

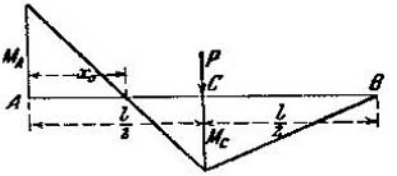
$$f = f_1 + f_2 = 0{,}0604 \text{ cm.}$$

414. Según la tabla 2, n.° 1a, se tiene para $a = b = l/2$

$$M_A = \frac{3}{16} P l, \qquad M_C = \frac{5}{32} P l;$$

M_A será, por lo tanto, el valor que habrá de utilizarse para calcular el radio r de la barra. Escribiendo

$$M_{máx} = \frac{3}{16} P l = k_b' W = k_b' \frac{\pi}{4} r^3,$$



resulta, siendo $P = 8000$ kg., $l = 1000$ cm., $k_b' = 700$ at., para r el valor

$$r = 14 \text{ cm.}$$

Las reacciones de los apoyos son:

$$A = \frac{11}{16} P = 5{,}5 \text{ t.}, \qquad B = \frac{5}{16} P = 2{,}5 \text{ t.};$$

el ángulo de inclinación ψ_B en el apoyo libre B es

$$\psi_B = \frac{P l^2}{32 E J} = 4{,}16 \cdot 10^{-3}, \text{ o sea } 0^\circ\, 14'\, 21'';$$

para la sección en que no hay cargas normales, $M = 0$, o sea

$$x_0 = 3\, l/11.$$

---

415. En la articulación B se produce un empuje que llamaremos también B. Suponiendo suelta la articulación, puede calcularse el recorrido del punto B por efecto de la fuerza P. Este recorrido se iguala al que efectuaría B por efecto del empuje B. Tendremos de este modo la igualdad

$$f_B = \frac{P a}{E F} = \frac{B l}{E F},$$

de donde

$$B = P a/l \text{ y del mismo modo } A = P b/l.$$

El recorrido de C es

$$f_C = \frac{P a}{E F} - \frac{B a}{E F} = \frac{P}{E F} \frac{b a}{l}.$$

416. Como las placas son rígidas, el acortamiento λ del cilindro de acero será el mismo que el de la envolvente de cobre. Poniendo

$$P = X_1 + X_2,$$

siendo X_1 la presión sobre el primero y X_2 la que obra sobre el segundo, tendremos

$$X_1 = \frac{\lambda}{l} E_1 \frac{\pi}{4} d^2, \qquad X_2 = \frac{\lambda}{l} E_2 \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2);$$

y sustituyendo resulta

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{P}{E_1 \pi d^2/4 + E_2 \pi (D^2 - d^2)/4} = 0{,}000\,093.$$

417. Al apretar la tuerca se produce una tracción en el perno y una compresión en el manguito. Sus valores X/F_1 y X/F_2 se deducen de la siguiente condición geométrica: La suma algébrica del alargamiento del perno y del acortamiento del manguito es igual al desplazamiento de la tuerca sobre el tornillo. Por lo tanto,

$$\frac{Xl}{E_1 F_1} + \frac{Xl}{E_2 F_2} = \frac{h}{4},$$

de donde resulta con los valores dados

$$X = \frac{h}{4\,l[1/E_1 F_1 + 1/E_2 F_2]} = 9900 \text{ kg}.$$

Así, pues, la tracción unitaria en el perno será $\frac{X}{F_1} = \frac{9900}{6} = 1650$ at., y la compresión unitaria en el manguito, $\frac{X}{F_2} = \frac{9900}{12} = 825$ at.

418. La fuerza P se descompone en dos partes,

$$P = X_1 + X_2,$$

de modo que la tracción del perno se aumenta en X_1 y la compresión del manguito se disminuye en X_2. Para determinarlas se utiliza la condición geométrica de que las dilataciones del perno y del manguito son iguales, es decir que

$$X_1 l/E_1 F_1 = X_2 l/E_2 F_2,$$

de donde se deduce

$$X_1 = \frac{E_1 F_1}{E_1 F_1 + E_2 F_2} P, \qquad X_2 = \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2} P,$$

y con los valores dados

$$X_1 = X_2 = P/2 = 1000 \text{ kg.},$$

o sea

$$X_1/F_1 = 166{,}7 \text{ at.}, \qquad X_2/F_2 = 83{,}4 \text{ at.}$$

Si F_1 es pequeño respecto a F_2, también lo será X_1 respecto a X_2, es decir que P provoca solamente una pequeña variación de la tensión del perno

419. Primeramente ha de verificarse la ecuación de la Estática

$$S_1 + 2 S_2 \cos \alpha = G.$$

Además, la dilatación de la varilla central es $\varepsilon_1 = \lambda/l$, y la tensión total de la misma será

$$S_1 = E_1 F_1 \frac{\lambda}{l}.$$

Del mismo modo, la dilatación de cada varilla lateral es $\varepsilon_2 = \frac{\lambda \cos \alpha}{l/\cos \alpha} = \frac{\lambda \cos^2 \alpha}{l}$, y la tensión total es

$$S_2 = E_2 F_2 \frac{\lambda \cos^2 \alpha}{l}.$$

Sustituyendo estas expresiones de S_1 y S_2 en la primera ecuación, resulta

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{G}{E_1 F_1 + 2 E_2 F_2 \cos^3 \alpha}.$$

420. Sea X la fracción de P que carga sobre la viga izquierda; $P - X$ será la correspondiente a la viga de la derecha. La igualdad del recorrido de C calculado para ambas vigas da la ecuación

$$f_c = \frac{X a^3}{3EJ} = \frac{(P - X) b^3}{3EJ},$$

de donde resulta

$$X = \frac{P b^3}{a^3 + b^3},$$

y, por lo tanto, tendremos para el descenso buscado

$$f_c = \frac{P}{3EJ} \frac{a^3 b^3}{a^3 + b^3}.$$

421. Sea X la reacción de la articulación en C que actúa hacia arriba para la viga de la izquierda y hacia abajo para la de la derecha; la igualdad de recorridos de C da la ecuación

$$f_c = \frac{P c^3}{3EJ} + \frac{P c^2 (a - c)}{2EJ} - \frac{X a^3}{3EJ} = \frac{X b^3}{3EJ},$$

de donde

$$X = \frac{P c^2 (3a - c)}{2(a^3 + b^3)}$$

y

$$f_c = \frac{P}{6EJ} \frac{b^3 c^2 (3a - c)}{a^3 + b^3}.$$

422. Llamando X a la reacción mutua de las barras en el punto de cruce suponiendo que para la más larga $2a$ actúa hacia arriba, y siendo f_1 y f_2 los recorridos de dicho punto considerados como pertenecientes a una u otra barra, se tiene, según la tabla 1, n.° 3,

$$f_1 = \frac{5}{24} \frac{q a^4}{EJ} - \frac{1}{6} \frac{X a^3}{EJ},$$

y

$$f_2 = \frac{5}{24} \frac{q b^4}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{X b^3}{EJ}.$$

Haciendo $f_1 = f_2$, se tiene

$$X = \frac{5}{4} q \frac{a^4 - b^4}{a^3 + b^3}.$$

Además, tenemos

$$A = qa - X/2, \qquad B = qb + X/2,$$

de donde

$$\frac{A}{B} = \frac{3a^4 + 8ab^3 + 5b^4}{5a^4 + 8a^3b + 3b^4}.$$

423. Procediendo lo mismo que antes, se tiene

$$f_1 = \frac{(P - X)a^3}{6EJ}, \qquad f_2 = \frac{(P + X)b^3}{6EJ},$$

y de la condición $f_1 = f_2$ se deduce

$$X = P \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}.$$

424. El ángulo de torsión por unidad de longitud ϑ es proporcional a M_t. Sea M_a la fracción de momento que absorbe el trozo a, y M_b la del trozo b; desde luego tendremos

$$M_t = M_a + M_b.$$

Si ϑ_a, ϑ_b son los ángulos de torsión de las partes a y b, siendo k una constante, tendremos

$$\vartheta_a = kM_a \quad \text{y} \quad \vartheta_b = kM_b.$$

Como en el punto de acción de M_t el ángulo total de torsión ha de ser igual para ambos trozos, se tendrá

$$\vartheta_a \cdot a = \vartheta_b \cdot b,$$

de donde se deducen M_a y M_b, resultando

$$M_a = \frac{b}{a + b} M_t, \qquad M_b = \frac{a}{a + b} M_t.$$

425. El extremo de la barra bajará f_1 y el punto medio de la viga se elevará f_2; tendremos, pues, $a = f_1 + f_2$. Según la fórmula (19) y la tabla 1, número 1a,

$$f_1 = \frac{Sl_1}{E_1F_1}, \qquad f_2 = \frac{Sl_2^3}{48E_2J_2},$$

de donde

$$S = \frac{a}{\dfrac{l_1}{E_1F_1} + \dfrac{1}{48}\dfrac{l_2^3}{E_2J_2}}.$$

426. Según la fórmula (19), el alargamiento de la barra es

$$f_1 = \frac{P_1l_1}{E_1F_1},$$

y según la tabla 1, n.° 1a, la flecha de la viga es

$$f_2 = \frac{P_2l_2^3}{48E_2J_2},$$

siendo F_1 la sección de la barra, J_2 el m. de i. de la sección de la viga y E_1 E_2 los respectivos coeficientes de elasticidad. De

$$f = f_1 = f_2, \qquad P = P_1 + P_2$$

resulta

$$P_1 = \frac{P}{1+\alpha}, \qquad P_2 = \frac{\alpha P}{1+\alpha}, \quad \text{siendo} \quad \alpha = 48\,\frac{E_2 J_2 l_1}{E_1 F_1 l_2^3},$$

y

$$f = \frac{P}{\dfrac{E_1 F_1}{l_1} + 48\,\dfrac{E_2 J_2}{l_2^3}}.$$

427. A los valores de f_1 y f_2 del problema anterior se añade

$$f_3 = \frac{P_3 l_3^4}{48 E_3 J_3}$$

y se tiene

$$P = P_1 + P_2 + P_3, \qquad f = f_1 = f_2 = f_3,$$

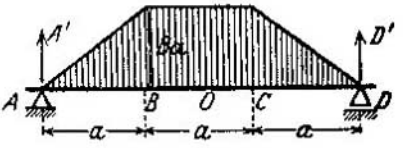
de donde la flecha en el punto medio

$$f = \frac{P}{\dfrac{E_1 F_1}{l_1} + 48\,\dfrac{E_2 J_2}{l_2^3} + 48\,\dfrac{E_3 J_3}{l_3^4}}$$

y la distribución de la carga

$$P_1 = \frac{E_1 F_1}{l_1} f, \qquad P_2 = 48\,\frac{E_2 J_2}{l_2^3} f, \qquad P_3 = 48\,\frac{E_3 J_3}{l_3^3} f.$$

428. Imaginemos suprimidos los apoyos intermedios B y C. Podemos igualar la flecha que toma en esas condiciones el punto B por efecto de la fuerza P con el que resulta para ese mismo punto por efecto de las reacciones desconocidas B y C en los puntos de igual nombre; es decir que



$$f_{PB} = f_{BB}.$$

Según la tabla 1, número 1a,

$$f_{PB} = \frac{Pl^3}{12EJ}\left[\frac{3}{4}\frac{a}{l} - \left(\frac{a}{l}\right)^3\right] = \frac{27Pa^3}{12EJ}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{27}\right] = \frac{23Pa^3}{48EJ}.$$

El modo más sencillo de obtener f_{BB} es aplicar el teorema de Mohr para la carga ideal indicada en la figura. Las reacciones virtuales de los apoyos son

$$A' = D' = \frac{Ba^2}{EJ},$$

y así tendremos

$$f_{BB} = \frac{Ba^3}{EJ} - \frac{Ba^2}{2EJ}\frac{a}{3} = \frac{5}{6}\frac{Ba^2}{EJ}.$$

Igualando se tiene

$$\frac{23P}{48} = \frac{5B}{6} \text{ y de aquí } B = \frac{23P}{40}, \qquad A = -\frac{3P}{40}.$$

429. Solución como en el problema anterior. La flecha de B por efecto de la carga $P = qa$ sobre el tramo medio se halla aplicando el teorema de Mohr. El momento en el punto O es

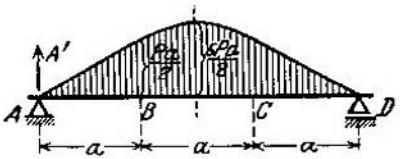
$$M_O = \frac{P}{2}\frac{3a}{2} - \frac{P}{2}\frac{a}{4} = \frac{5Pa}{8},$$

y la reacción virtual en A,

$$A' = \frac{Pa^2}{2EJ} + \frac{Pa^2}{4EJ} + \frac{2}{3}\frac{Pa^2}{16EJ} = \frac{13}{24}\frac{Pa^2}{EJ}.$$

Por lo tanto, tendremos

$$f_{PB} = \frac{13}{24}\frac{Pa^3}{EJ} - \frac{Pa^2}{4EJ}\frac{a}{3} = \frac{11Pa^3}{24EJ}$$



y, como antes,

$$f_{BB} = \frac{5}{6}\frac{Ba^3}{EJ}.$$

De la igualdad $f_{BP} = f_{BB}$ se deduce inmediatamente

$$B = \frac{11P}{20}, \qquad A = -\frac{P}{20}.$$

430. Imaginemos suprimido el apoyo A. Deberá verificarse la igualdad

$$f_{PA} = f_{AA},$$

y utilizando la tabla 1, n.º 4, se obtiene la siguiente ecuación para determinar la reacción del apoyo A

$$\frac{P(l-a)^3}{3EJ} + \frac{P(l-a)^2 a}{2EJ} = \frac{Al^3}{3EJ}.$$

De ahí se deduce

$$A = P\frac{(l-a)^2(2l+a)}{2l^3} = P\left[1 - \frac{a(3l^2-a^2)}{2l^3}\right];$$

además,

$$B = 2(P - A) = P\frac{a(3l^2-a^2)}{l^3}.$$

y el momento de empotramiento en B

$$M_B = Al - P(l-a) = -\frac{Pa(l^2-a^2)}{2l^2}.$$

431. La solución se halla inmediatamente utilizando los resultados del problema anterior o bien imaginando suprimido el apoyo B y escribiendo la igualdad

$$f_{PB} = f_{BB}.$$

Por medio del teorema de Mohr se obtiene la reacción virtual del apoyo debida a los momentos flectores

$$A' = \frac{Pa}{EJ}\left(l - \frac{a}{2}\right).$$

La igualdad (a) se convierte, pues, en

$$A'l - \frac{Pa^2}{2EJ}\left(l - \frac{2a}{3}\right) - \frac{Pa}{2EJ}(l-a)^2 = \frac{Bl^3}{6EJ},$$

y de aquí se deduce, como antes, $B = \dfrac{Pa(3l^2 - a^2)}{l^3}$.

432. Utilizando la tabla 1, número 6, se obtiene con la igualdad

$$f_{QB} = f_{BB}$$

inmediatamente la siguiente ecuación para determinar B

$$\frac{ql^4}{8EJ} = \frac{Bl^3}{3EJ},$$

de donde $\qquad B = 3ql/8 \quad$ y $\quad A = 5ql/8$,

y el momento de empotramiento

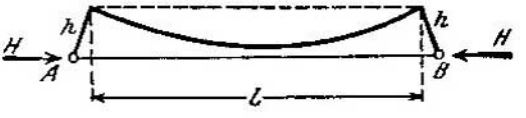
$$M_B = -Bl + ql^2/4 = -ql^2/8.$$

433. Lo más sencillo es suponer sustituídas las dos articulaciones A y B por guías que permitan el desplazamiento de las secciones de apoyo al actuar la carga $ql = Q$. La igualdad

$$f_{QA} = f_{HA}$$

da, utilizando la tabla 1, n.° 2a y 3, la siguiente ecuación para determinar el empuje H:

$$\frac{qlh}{24EJ} = \frac{Hh^2l}{2EJ} + \frac{Hl}{2EF},$$



y de aquí

$$H = \frac{ql^2}{12(h + J/hF)}.$$

434. Teniendo solamente en cuenta las flexiones, la condición de igualdad de flecha de los puntos C y D da

$$(P + S \operatorname{sen} \alpha)\frac{l^3}{3EJ} = (Q - S \operatorname{sen} \alpha)\frac{l_1^3}{3EJ_1},$$

de donde resulta $\qquad S = \dfrac{Ql_1^3/J_1 - Pl^3/J}{\operatorname{sen} \alpha\,(l^3/J + l_1^3/J_1)}$.

El descenso de los puntos C y D en dirección vertical vale

$$f = \frac{P + Q}{3E}\,\frac{l^3 l_1^3/JJ_1}{l^3/J + l_1^3/J_1}.$$

El cálculo se complica si se quieren tener en cuenta las deformaciones debidas a las fuerzas normales S, S_1, S_2.

435. Supongamos suelta la articulación A y calculemos el desplazamiento de A debido por una parte a la fuerza P y por otra al empuje H, valores que deben ser iguales. De esta manera se tiene la ecuación (véase la tabla 1, números 1 y 4)

$$f_A = \frac{Pbha(l + b)}{6EJ_2l} = \frac{Hhl^2}{3EJ_2} + \frac{Hh^3}{3EJ_1},$$

de donde $\qquad H = \dfrac{Pab(l + b)}{2hl^2\left(\dfrac{J^2h}{J_1l} + 1\right)} = \dfrac{Pab(l + b)}{2hl^2(k + 1)}$,

siendo $\frac{J_2 h}{J_1 l} = k$. (Ésta es la notación usada por Kleinlogel: «Rahmenformeln», 6.ª ed. Berlín, 1929). Los momentos en A y C son:

$$V_C = \frac{Pa}{l} = \frac{Hh}{l}, \qquad V_A = \frac{Pb}{l} + \frac{Hh}{l},$$

siendo $V_A + V_C = P$.

El máximo momento en el dintel corresponde al punto de acción de la carga P, y vale

$$M_P = V_A a - Hh = \frac{Pab}{2l^2} \frac{2kl^2 + 3al - a^2}{k+1}.$$

436. Procediendo como antes se obtiene por medio de la tabla I, números 3 y 4, la ecuación

$$f_A = \frac{ql^3 h}{24EJ_2} = \frac{Hh^2 l}{3EJ_2} + \frac{Hh^3}{3EJ_1},$$

de donde
$$H = \frac{ql^2}{8h(k+1)}.$$

Además,
$$V_C = \frac{ql}{2} - \frac{Hh}{l} = \frac{ql}{8} \frac{4k+3}{k+1},$$

$$V_A = \frac{ql}{2} - \frac{Hh}{l} = \frac{ql}{8} \frac{4k+5}{k+1}.$$

437. Supongamos sueltas las articulaciones, y el pórtico cargado con la carga P. Los desplazamientos de A y D son

$$f_A = \frac{Pab(l+b)h}{6EJ_2 l}, \qquad f_D = \frac{Pab(l+a)h}{6EJ_2 l}.$$

Estos desplazamientos deben anularse por efecto de los empujes H. Para cada lado el desplazamiento anulado es la media aritmética $(f_A + f_D)/2$. Así se obtiene la ecuación

$$\frac{f_A + f_D}{2} = \frac{Pabh}{4EJ_2} = \frac{Hh^2 l}{2EJ_2} + \frac{Hh^3}{3EJ_1},$$

de donde
$$H = \frac{3}{2} \frac{Pab}{hl(2k+3)}.$$

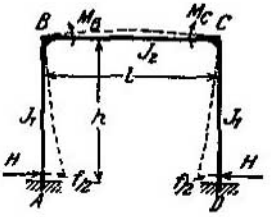
438. Como en el caso anterior, tenemos

$$f_A = \frac{ql^3 h}{24EJ_2} = \frac{Hh^2 l}{2EJ_2} + \frac{Hh^3}{3EJ_1},$$

de donde
$$H = \frac{ql^2}{4h(2k+3)}.$$

439. Se suponen sustituidos los empotramientos por simples apoyos, y en estas condiciones se expresan así los desplazamientos y las inclinaciones producidas por la carga q que actúa en el dintel y, por otra parte, los produ-

cidos por los empujes H y momentos M_A. Según la tabla 1, núms. 1, 4, se obtienen de esta manera las ecuaciones



$$f_A = \frac{ql^3h}{24EJ_2} = \frac{Hh^3}{3EJ_1} + \frac{Hh^2l}{2EJ_2} + \frac{M_Ah^2}{2EJ_1} + \frac{M_Alh}{2EJ_2},$$

$$\psi_A = \frac{ql^3}{24EJ_2} = \frac{Hh_2}{2EJ_1} + \frac{Hhl}{2EJ_2} + \frac{M_Ah}{EJ_1} + \frac{M_Al}{2EJ_2};$$

y de aquí se deduce

$$H = \frac{ql^3}{4h(k+2)}, \quad \text{siendo} \quad k = \frac{J_2h}{J_1l}$$

y

$$M_A = \frac{Hh}{3}, \qquad M_B + \frac{2Hh}{3}.$$

440. Supongamos que el momento flector desconocido en A es M_A; la viga $\overline{AB}$ está sometida al efecto de la fuerza P y de los momentos M_A que actúan en las secciones extremas; la viga $\overline{AC}$ está solicitada únicamente por los momentos M_A que actúan también en sus secciones extremas. La condición geométrica de ser rígidos los vértices se traduce en que el giro de las secciones adyacentes es el mismo. Esto conduce a la ecuación (tabla 1, números 1 y 2 a)

$$\psi_A = \frac{Pa^2}{4EJ} - \frac{M_Aa}{EJ} = \frac{M_Aa_1}{E_1J_1}.$$

De aquí se deduce inmediatamente el momento en A

$$M_A = \frac{P}{4}\,\frac{a^2}{a + a_1(EJ/E_1J_1)}.$$

La flecha en el punto de acción de P es

$$f_P = \frac{Pa^3}{6EJ} - \frac{M_Aa^2}{2EJ} = \frac{Pa^3}{24EJ}\,\frac{a + 4a_1(EJ/E_1J_1)}{a + a_1(EJ/E_1J_1)}.$$

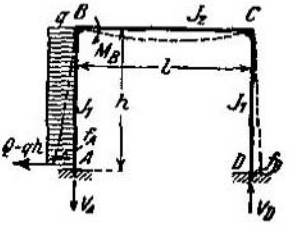
441. Supongamos suelta la articulación D (es decir, sustituida por un simple apoyo), con lo cual la estructura es isostática. Las reacciones son (véase figura)

$$Q = qh \quad \text{en} \quad A,$$

$$V_A = -V_D = -\frac{qh^2}{2l} \text{ en } A \text{ y resp. en } D;$$

El momento en B vale

$$M_B = qh^2/2.$$



Por efecto de la carga q y de las reacciones halladas, los puntos A y D del pórtico tienen los desplazamientos horizontales f_A y f_D; luego (véase la tabla 1, números 4, 6, 2 a, 2 b)

$$f \equiv f_A + f_D = \frac{qh^4}{3EJ_1} - \frac{qh^4}{8EJ_1} + \frac{qh^3l}{6EJ_2} + \frac{qh^3l}{12EJ_2}$$

$$= \frac{qh^3l}{24EJ_2}(5k + 6), \qquad k = \frac{J_2h}{J_1l}.$$

Estos desplazamientos han de anularse por efecto de los empujes H que actúan en A y D, y, por lo tanto,

$$f = \frac{2Hh^3}{3EJ_1} + \frac{Hh^2l}{EJ_2} = H\frac{h^2l}{3EJ_2}(2k+3).$$

Igualando ambas expresiones se tiene

$$H = \frac{qh}{8}\frac{5k+6}{2k+3}.$$

Los empujes horizontales resultantes son:

en A, $$H_A = Q - H = \frac{qh}{8}\frac{11k+18}{2k+3};$$

en D, $$H_D = H.$$

---

442. Según la fórmula (99), el trabajo elástico en una barra prismática es

$$A = \frac{P^2l}{2EF}.$$

La tensión unitaria es $\sigma = P/F$, y el volumen, $V = Fl$; sustituyendo valores resulta

$$A = \frac{\sigma^2}{2E}V,$$

y, por lo tanto, el trabajo elástico por unidad de volumen será

$$\frac{A}{V} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Para $\sigma = \frac{P}{F_1} = 1000$ at., tendremos $\frac{A}{V} = \frac{1}{4}\frac{\text{cmkg.}}{\text{cm.}^3}$.

443. La variación de longitud de la barra es

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF},$$

siendo P la fuerza que actúa y $F = bc\pi$ el área de la sección. De aquí se deduce, según la fórmula (99),

$$A = \frac{1}{2}P\cdot\Delta l = \frac{1}{2}\cdot\frac{EF}{l}\overline{\Delta l}^2 = \frac{1}{2}E\varepsilon^2V = 3{,}77 \text{ mkg.}$$

444. A la distancia x de la sección inferior, el trabajo originado por el peso propio es $\sigma = \gamma x$, siendo γ el peso específico. Siendo $G = \gamma\cdot F\cdot l$, tendremos, según la fórmula (97),

$$A = \frac{F}{2E}\int_0^l \sigma^2 dx = \frac{1}{6}\frac{G^2l}{EF}.$$

445. La sección transversal de un sólido de igual resistencia a la tracción está dada por la ecuación $F = F_0e^{ax}$, siendo $a = \gamma/\sigma$; la carga unitaria

σ es en todos los puntos del sólido la misma, o sea $\sigma = P/F_0$ y $a = F_0\gamma/P$. La fórmula (97) nos da

$$A = \frac{\sigma^2}{2E}\int_0^l dV = \frac{P^2}{2EF_0^2}V,$$

en donde V es el volumen del sólido, cuyo valor es

$$V = \int_0^l F\,dx = \frac{P}{\gamma}[e^{al} - 1].$$

446. El trabajo elástico de la barra G_1 es: 1.°, debido al peso propio (según el problema **444**) $\frac{1}{6}\frac{G_1^2 l}{EF_1}$; 2.°, debido a la carga P en el extremo [según la fórmula (99)] $\frac{1}{2}\frac{P^2 l}{EF_1}$; 3.°, siendo $\Delta l = \frac{Pl}{EF_1}$ el alargamiento debido a P, al peso propio G_1 le corresponde, además, el trabajo $G_1\Delta l/2$ (puesto que el c. d. g. tiene un recorrido mitad del que efectúa el punto extremo). El trabajo elástico de la barra G_1 será, pues,

$$A_1 = \frac{1}{6}\frac{G_1^2 l}{EF_1} + \frac{1}{2}\frac{P^2 l}{EF_1} + \frac{1}{2}G_1\frac{Pl}{EF_1}.$$

Este mismo resultado se hallará usando la fórmula (97) y haciendo $\sigma = P/F_1 + \gamma x$. Del mismo modo, para la barra G_2 se tiene

$$A_2 = \frac{1}{6}\frac{G_2^2 l}{EF_2} + \frac{1}{2}\frac{(P+G_1)^2 l}{EF_2} + \frac{1}{2}G_2\frac{(P+G_1)l}{EF_2}.$$

Igualando los trabajos por unidad de volumen, esto es,

$$\frac{A_1}{F_1 l} = \frac{A_2}{F_2 l},$$

y observando que $F_1 : F_2 = G_1 : G_2$, resulta para P la ecuación

$$P^2(G_2 - G_1) + P(G_2 - 2G_1) = G_1^2.$$

Para $G_2 = 2G_1$ se tiene $P = G_1$.

447. A la distancia x del vértice del cono, la sección es $F = y^2\pi$, siendo $y = xr/h$. De esta sección cuelga el peso de un cono de altura x; la tensión unitaria será, pues, $\sigma = \gamma x/3$, siendo γ el peso específico. Aplicando ahora la fórmula (97) se tiene

$$A = \frac{1}{2E}\int_0^h F\sigma^2 dx = \frac{G^2 h}{10Er^2\pi},$$

en donde

$$G = \gamma r^2\pi h/3.$$

448. Sea a la altura del cono suplementario; la sección a la distancia x de la base superior del tronco tiene un área

$$F = F_0\left(\frac{a+x}{a}\right)^2.$$

Sustituyendo en la fórmula (97), $\sigma = P/F$, tenemos

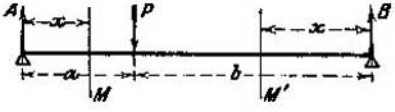
$$A = \frac{1}{2E}\int_0^h F\sigma^2 dx = \frac{P^2a^2}{2EF_0}\int_0^h \frac{dx}{(a+x)^2} = \frac{P^2h}{2E\sqrt{F_0F_1}}.$$

449. Según la tabla 1, n.° 1 a, para $a = b = l/2$ la flecha en el punto medio es $f = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EJ}$; luego

$$A = \frac{1}{2}Pf = \frac{24EJ}{l^3}f^2.$$

450. En el trozo $\overline{AP}$ el momento flector es $M = Ax$; para el trozo $\overline{PB}$ es $M' = Bx'$. El trabajo elástico es [fórmula (100)]

$$A = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^a M^2dx + \int_0^b M'^2dx'\right\} = \frac{P^2a^2b^2}{6EJl}.$$



haciendo $A = Pb/l$ y $B = Pa/l$.

Al mismo resultado se llega haciendo $A = Pf/2$, y para la flecha f el valor que da la tabla 1, n.° 1.

451. El momento flector a la distancia x del apoyo vale

$$M = q(lx - x^2)/2,$$

y, por lo tanto, según la fórmula (100),

$$A = \frac{1}{2EJ}\int_0^l M^2dx = \frac{q^2l^5}{240EJ}.$$

452. La carga divide la viga en dos trozos. En el trozo a el momento flector es

$$M = Ax - qx^2/2;$$

en el trozo $l - a$ es

$$M' = Bx'.$$

Según el problema 228, haremos

$$A = qa(2l - a)/2l,$$
$$B = qa^2/2l.$$

Según la fórmula (100), el trabajo elástico será

$$A = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^a M^2dx + \int_0^{l-a} M'^2dx'\right\} = \frac{q^2a^4}{240EJl}(10l^2 - 14al + 5a^2).$$

453. La flecha en el punto medio es (tabla 1, n.° 3)

$$f = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ},$$

y, por lo tanto, según el resultado del problema 449,

$$A = \frac{3072}{125}\frac{EJf^2}{l^3}.$$

454. El problema no puede resolverse hallando separadamente los trabajos elásticos para cada carga (problemas 449 y 451) y sumando los resultados. El cálculo es semejante al del problema 450, solamente que en este caso

$$A = P\frac{b}{l} + \frac{ql}{2}, \qquad M = Ax - \frac{1}{2}qx^2,$$

$$B = P\frac{a}{l} + \frac{ql}{2}, \qquad M' = Bx' - \frac{1}{2}qx'^2.$$

Después de efectuar la integración se tiene

$$A = \frac{1}{6EJ}\left[\frac{P^2a^2b^2}{l} + \frac{Pqab}{4}(l^2 + ab) + \frac{q^2l^5}{40}\right].$$

455. El momento flector en el punto x es

$$M = \frac{Q}{6l^2}(3xl^2 - 6x^2l + 4x^3).$$

Según la fórmula (100), el trabajo elástico es

$$A = 2\frac{1}{2EJ}\int_0^{l/2} M^2dx = \frac{Q^2l^3}{448EJ}.$$

456. El momento flector en el trozo AB es $M_1 = Ax_1$, siendo $A = P(l/l_1 - 1)$ la reacción en el apoyo; en el segundo trozo $\overline{BC}$ el momento es $M_2 = Px_2$; eso contando las x_1 desde A hacia la derecha y las x_2 desde C hacia la izquierda. El trabajo elástico, según la fórmula (100), es

$$A = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^{l_1} M_1^2dx_1 + \int_0^{l-l_1} M_2^2dx_2\right\} = \frac{P^2l(l-l_1)^2}{6EJ}.$$

457. Según el problema 171, las reacciones de apoyos son

$$A = \frac{1}{2}al^2\left(1 - \frac{2l}{3l_1}\right), \qquad B = \frac{1}{3}\frac{al^3}{l_1}.$$

El momento flector en el trozo $\overline{AB}$ es

$$M_1 = Ax - ax^3/6,$$

y en el trozo $\overline{BC}$,

$$M_2 = Ax - ax^3/6 + B(x - l_1).$$

Aquí se cuentan las x de ambos trozos, a partir de A. El trabajo de deformación es, según la fórmula (100),

$$A = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^{l_1} M_1^2 dx + \int_{l_1}^{l} M_2^2 dx\right\}$$

$$= \frac{a^2 l^2}{7560EJ}\{99l^4 - 280l^3 l_1 + 210l^2 l_1^2 - 21l_1^4\}.$$

458. Según el problema 255, las cargas unitarias tangenciales en una sección rectangular valen

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right),$$

de donde aplicando la fórmula (98) y haciendo $dV = b\,dx\,dz$ resulta el trabajo elástico

$$A = \frac{1}{2G}\int \tau^2 dV = \frac{18}{Gbh^6}\int_0^l Q^2 dx \cdot \int_{-h/2}^{+h/2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)^2 dz = \frac{3}{5Gbh}\int_0^l Q^2 dx.$$

La carga P divide a la viga en dos trozos a_1 y a_2; en el primero $Q_1 = Pa_2/l$, y en el segundo $Q_2 = Pa_1/l$; por lo tanto,

$$A = \frac{3}{5Gbh}\left\{\int_0^{a_1} Q_1^2 dx + \int_0^{a_2} Q_2^2 dx\right\} = \frac{3}{5}\frac{P^2 a_1 a_2}{Gbhl}.$$

459. Según el problema 257, las cargas tangenciales en una sección circular valen

$$\tau = \frac{Q}{3J}\sqrt{y_1^4 + y^2 z^2},$$

siendo $y_1^2 = r^2 - z^2$ (véase la figura de la solución al problema 257).

Utilizando ahora la fórmula (98) y escribiendo $dV = dx\,dy\,dz$, el trabajo elástico es

$$A = \frac{1}{2G}\int \tau^2 dV = \frac{1}{18GJ^2}\int_0^l Q^2 dx \cdot \int_{-r}^{+r}\int_{-y_1}^{+y_1}(y_1^4 + y^2 z^2)\,dy\,dz.$$

La segunda integral da

$$\int_{-r}^{+r} 2\left(y_1^4 + \frac{1}{3}z^2 y_1^2\right) dz = \frac{16}{9}r^4\int_{-r}^{+r}(r^2 - z^2)^{3/2} dz = \frac{2}{3}\pi r^6$$

La primera integral, sustituyendo el esfuerzo cortante

$$Q = q\,(l/2 - x),$$

toma el valor

$$\int_0^l Q^2 dx = \frac{q^2 l^3}{12}.$$

Haciendo $J = \pi r^4/4$ se halla, finalmente,

$$A = \frac{4}{81}\frac{q^2 l^3}{G\pi r^3}.$$

460. Según la fórmula (98), se tiene

$$A = \frac{1}{2G}\int_0 \tau^2 dV.$$

Para una sección rectangular (b, h) de la viga, las fórmulas (44) y (46), siendo $\varphi = 0$, y $2y_1 = b$, dan

$$\tau = \tau_z = \frac{SQ}{bJ}, \quad S = fz_0 = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right),$$

$$dV = b\,dz\,dx, \quad J = bh^3/12,$$

de donde

$$A = \frac{b}{8GJ^2}\int_{-h/2}^{+h/2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)^2 dz \cdot \int_0^l Q^2 dx = \frac{3}{5FG}\int_0^l Q^2 dx.$$

461. Sea δ el diámetro a la distancia x del punto de acción de la carga, l la longitud de la barra y d su diámetro en el apoyo; siendo un sólido de igual resistencia y aplicando la fórmula (43), tendremos

$$\delta^3 = d^3 x/l.$$

Sustituyendo en la fórmula (100) $M = Px$ y $J = \pi d^4/64$, el trabajo elástico es

$$A = \frac{3}{10}\frac{P^2 l^3}{EJ_1},$$

siendo $J_1 = \pi d^4/64$ el m. de i. en la sección de empotramiento.

462. El trabajo elástico se calcula por la fórmula (97), siendo

$$\sigma = \frac{P\cos\alpha}{F} + \frac{xzP\,\mathrm{sen}\,\alpha}{J}$$

y, además, siendo x la coordenada en la dirección del eje de la barra y z la coordenada normal a x en el plano de la figura. En estas condiciones, se tiene

$$A = \frac{P^2 l}{2EF}\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{3}\frac{l^2}{i^2}\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right).$$

463. Sea x la distancia de una sección al extremo B; el momento flector en el trozo $\overline{CB}$ vale $M_1 = qx^2/2$, y en el $\overline{AC}$, $M_2 = qa\,(x - a/2)$; por lo tanto, el trabajo elástico será, según la fórmula (100),

$$A = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^a M_1^2 dx + \int_a^l M_2^2 dx\right\},$$

o sea

$$A = \frac{q^2 a^2}{120\,EJ}\,(20\,l^3 - 30\,l^2 a + 15\,l a^2 - 2\,a^3).$$

464. Para este caso, M_1 no varía y, además, se tiene

$$M_2 = qa\,(x - a/2) + P\,(x - a)\,;$$

por lo demás, el cálculo es el mismo.

Así se tiene

$$A = \frac{q^2a^4}{40\,EJ} + \frac{l - a}{12EJ}\,[2A^2\,(l - a)^2 + 3a^2qM_A],$$

en donde $A = P + aq$ es la reacción del apoyo

y $M_A = P\,(l - a) + aq\,(l - a/2)$ es el momento de empotramiento.

465. El trabajo elástico es

$$A = Pf/2,$$

en donde, según la tabla 2, n.° 1a, hay que poner $f = \frac{7}{768}\frac{Pl^3}{EJ}$;

por lo tanto,

$$A = \frac{7}{1536}\frac{P^2l^3}{EJ}.$$

466. El cálculo es parecido al del problema 450, sólo que debe ponerse:

Para el momento flector en el trozo a, $M = -M_A + Ax$;

para el momento flector en el trozo b, $M' = -M_B + Bx'$,

y según la tabla 2, n.° 1,

$$M_A = P\,\frac{ab^2}{l^2}, \quad A = P\,\frac{b^2\,(3a + b)}{l^3},$$

siendo expresiones análogas las correspondientes a M_B y B. Efectuando las integraciones, se halla

$$A = \frac{1}{6}\,\frac{P^2a^3b^3}{EJl^3}.$$

467. Según la fórmula (101), el trabajo elástico de un momento de torsión vale

$$A = \frac{1}{2}\,M_t\vartheta l,$$

en donde, según la fórmula (55),

$$M_t = \pi\vartheta Gr^4/2,$$

y el ángulo total de torsión del eje es

$$\varphi^\circ = l\vartheta^\circ = l\,\frac{180}{\pi}\,\hat{\vartheta}.$$

De aquí se deduce

$$A = \frac{\pi^3}{129\,600}\,\varphi^2\,\frac{Gr^4}{l} \qquad (\text{¡}\varphi \text{ en grados!})$$

468. El husillo $\overline{AC}$, al funcionar la estampa está sometido a compresión y, según la fórmula (99), absorbe un trabajo elástico

$$A_1 = \frac{P^2\,(l_1 + l_3)}{2E_1F_1},$$

siendo F_1 la sección del husillo.

El trozo $\overline{AB}$ del husillo está sometido, además, a torsión y, por lo tanto, según las fórmulas (101) y (55), absorbe un trabajo

$$A_3 = \frac{1}{2} M_t \vartheta l_3 = \frac{1}{\pi} \frac{M_t^2 l_3}{G r^4},$$

siendo r el radio del husillo.

Siendo P_1 la fuerza tangencial en el husillo, α el ángulo de inclinación y ϱ el ángulo de rozamiento del tornillo en B, se tiene

$$P_1 = P \operatorname{tg}(\alpha + \varrho), \quad M_t = P_1 r.$$

Por lo tanto,

$$A_3 = \frac{P^2 l_3 \operatorname{tg}^2(\alpha + \varrho)}{G F_1}.$$

El bastidor, cuya longitud es l_2 y cuya sección es $2F_2$, está sometido a la compresión P y, además, en el punto B a flexión; en cada una de las dos partes del bastidor la fuerza que produce la flexión es $P_1/2$, que, según la tabla 1, n.° 4, produce una desviación lateral

$$f = \frac{1}{3} \frac{P_1 l_2^3/2}{E_2 J_2},$$

siendo J_2 el m. de i. de F_2. Por lo tanto, el bastidor absorbe un trabajo

$$A_2 = \frac{P^2 l_2}{4 F_2 E_2} + 2 \frac{1}{2} \frac{P_1}{2} f = \frac{P^2 l_2}{4 E_2 F_2} + \frac{P^2 l_2^3 \operatorname{tg}^2(\alpha + \varrho)}{12 E_2 J_2}.$$

El trabajo elástico total absorbido por la prensa es, pues,

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= P^2 \left\{ \frac{l_1 + l_3}{2 E_1 F_1} + \frac{l_2}{4 E_2 F_2} + \operatorname{tg}^2(\alpha + \varrho) \left[\frac{l_3}{G F_1} + \frac{l_2}{12 E_2 J_2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

469. Siendo parabólico el diagrama, se tiene en primer lugar

$$\left(\frac{\sigma - \sigma_P}{K_z - \sigma_P} \right)^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_B}.$$

La superficie del diagrama es el trabajo absorbido por la barra, por unidad de volumen. Se tiene, pues,

$$A = F l \varepsilon \left[\sigma_P + \frac{2}{3} (\sigma - \sigma_P) \right],$$

y haciendo

$$P = F \sigma$$

resulta

$$A = \frac{l \varepsilon_B}{3 F^2 (K_z - \sigma_P)^2} (2P + F \sigma_P)(P - F \sigma_P)^2.$$

---

470. Las condiciones de equilibrio dan inmediatamente

$$A = B, \quad C = 2(aq - A).$$

El trabajo elástico (tracción en las barras y flexión en la viga) es, según las fórmulas (99) y (100),

$$A = 2\frac{A^2 l}{2EF} + \frac{C^2 l}{2EF} + 2\frac{1}{2EJ}\int_0^a M^2 dx,$$

siendo F la sección de las barras y J el m. de i. de la viga.

Consideremos la tensión total A como hiperestática y pongamos

$$\frac{\partial A}{\partial A} = 0;$$

tendremos de esta manera

$$\frac{2Al}{F} + \frac{Cl}{F}\frac{\partial C}{\partial A} + \frac{2}{J}\int_0^a M\frac{\partial M}{\partial A}dx = 0.$$

El momento flector es $M = Ax - qx^2/2$, de donde $\frac{\partial M}{\partial A} = x$; además, $\frac{\partial C}{\partial A} = -2$. Efectuando la integración tendremos

$$A = B = qa\frac{48Jl + 3a^3F}{72Jl + 8a^3F},$$

$$C = 2qa\frac{24Jl + 5a^3F}{72Jl + 8a^3F}.$$

471. Tenemos en primer lugar $2(A + B) = P$. El trabajo elástico de las cuatro varillas es [(fórmula (99)]

$$A = \frac{A^2 l}{EF_1} + \frac{B^2 l}{EF_2}.$$

Haciendo $\frac{\partial A}{\partial A} = 0$, resultan, teniendo en cuenta que $\frac{\partial B}{\partial A} = -1$, los valores

$$A = \frac{F_1}{F_1 + F_2}\cdot\frac{P}{2} \quad \text{y} \quad B = \frac{F_2}{F_1 + F_2}\cdot\frac{P}{2}.$$

El mismo resultado se halla igualando [véase la fórmula (19)] las variaciones de longitud de ambas barras, o sea $\frac{Al}{EF_1} = \frac{Bl}{EF_2}$.

472. El momento flector en el trozo $\overline{AB}$ es $M_1 = Ax$; en el $\overline{BP}$,

$$M_2 = Ax + B(x - a) = \frac{P}{2}x - Ba.$$

El trabajo elástico de las varillas y de la viga supuesta horizontal es

$$A = \frac{A^2 l}{EF_1} + \frac{B^2 l}{EF_2} + \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^a M_1^2 dx + \int_a^{3a/2} M_2^2 dx\right\}$$

Haciendo $\frac{\partial A}{\partial A} = 0$, se tiene

$$\frac{Al}{F_1} + \frac{Bl}{F_2}\frac{\partial B}{\partial A} + \frac{1}{J}\left[\int_0^a M_1\frac{\partial M_1}{\partial A}dx + \int_a^{3a/2} M_2\frac{\partial M_2}{\partial A}dx\right] = 0,$$

en donde $\frac{\partial B}{\partial A} = -1$, como en el problema anterior; además, $\frac{\partial M_1}{\partial A} = x$, $\frac{\partial M_2}{\partial A} = a$. Efectuando las integraciones resulta:

$$A = \frac{P}{2}\,\frac{F_1\,(Jl - a^3F_2/8)}{Jl\,(F_1 + F_2) + 5a^3F_1F_2/6},$$

$$B = \frac{P}{2}\,\frac{F_2\,(Jl + 23a^3F_1/24)}{Jl\,(F_1 + F_2) + 5a^3F_1F_2/6}.$$

473. Las ecuaciones de la estática dan:

$$\left.\begin{aligned} S_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + S_2 \operatorname{sen} \alpha_2 + S_3 \operatorname{sen} \alpha_3 &= P, \\ S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

El trabajo elástico es

$$\mathsf{A} = \frac{S_1^2 l_1}{2EF_1} + \frac{S_2^2 l_2}{2EF_2} + \frac{S_3^2 l_3}{2EF_3}. \qquad \text{(b)}$$

Consideremos, por ejemplo, a S_1 como una magnitud hiperestática y hagamos $\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial S_1} = 0$, eliminando $\frac{\partial S_2}{\partial S_1}$, $\frac{\partial S_3}{\partial S_1}$ con ayuda de las ecuaciones estáticas. De esta manera resulta

$$\frac{S_1 l_1}{F_1} \operatorname{sen}(\alpha_3 - \alpha_2) + \frac{S_2 l_2}{F_2} \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_3) + \frac{S_3 l_3}{F_3} \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1) = 0.$$

Esta ecuación significa, como se comprueba fácilmente, que las deformaciones concuerdan entre sí, esto es, que las barras después de su alargamiento coinciden en el punto C.

Las tres ecuaciones (a) y (b) determinan S_1, S_2 y S_3.

474. La expresión del equilibrio estático de un vértice es

$$P = S_1 + 2S \cos 30^\circ = S_1 + S\sqrt{3}.$$

El trabajo elástico del entramado vale [fórmula (99)]

$$\mathsf{A} = 3\,\frac{S^2 l}{2EF} + 3\,\frac{S_1^2 l_1}{2EF}.$$

Haciendo, según la fórmula (102),

$$\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial S} = 0,$$

resulta

$$Sl + S_1 \frac{\partial S_1}{\partial S}\, l_1 = 0;$$

de la primera ecuación resulta $\frac{\partial S_1}{\partial S} = -\sqrt{3}$, y observando, además, que $l = l_1\sqrt{3}$, se tiene

$$S = S_1 = \frac{P}{1 + \sqrt{3}}.$$

475. El equilibrio de los nudos nos suministra las ecuaciones estáticas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} Q + S_1 + 2S \cos 45^\circ &= 0, \\ P - S_2 - 2S \cos 45^\circ &+ 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

El trabajo elástico del entramado es [fórmula (99)]

$$A = \frac{1}{2EF}\,[4S^2 l + S_1^2 l_1 + S_2^2 l_1],$$

siendo l la longitud del lado, y l_1 la de la diagonal. Haciendo $\frac{\partial A}{\partial S} = 0$, se deduce

$$4Sl + S_1 l_1 \frac{\partial S_1}{\partial S} + S_2 l_1 \frac{\partial S_2}{\partial S} = 0,$$

y como según las primeras ecuaciones

$$\frac{\partial S_1}{\partial S} = -\sqrt{2}, \quad \frac{\partial S_2}{\partial S} = -\sqrt{2},$$

resulta

$$2S - S_1 - S_2 = 0. \qquad \text{(b)}$$

Esta ecuación (b) junto con las dos ecuaciones (a) dan, finalmente,

$$S = \frac{P - Q}{2 + 2\sqrt{2}}, \quad S_1 = -\frac{P + Q(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}}, \quad S_2 = \frac{P(1 + \sqrt{2}) + Q}{2 + \sqrt{2}}.$$

476. Las reacciones de los apoyos son

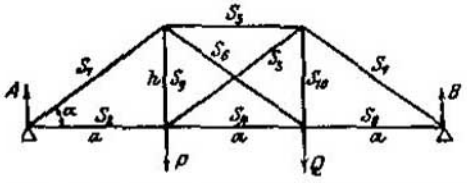
$$A = (2P + Q)/3, \quad B = (P + 2Q)/3,$$

y, además, son isostáticas las tensiones

$$S_1 = -A/\operatorname{sen}\alpha, \quad S_2 = A\cot\operatorname{g}\alpha,$$

$$S_7 = -B/\operatorname{sen}\alpha, \quad S_8 = B\cot\operatorname{g}\alpha.$$

Por otra parte, las condiciones estáticas de equilibrio en los nudos suministran las cinco ecuaciones siguientes:



$$S_4 = (P + Q)\cot\operatorname{g}\alpha + S_2,$$

$$S_5 = -B/\operatorname{sen}\alpha - S_2/\cos\alpha,$$

$$S_6 = -A/\operatorname{sen}\alpha - S_2/\cos\alpha,$$

$$S_9 = 2A + S_2\operatorname{tg}\alpha,$$

$$S_{10} = 2B + S_2\operatorname{tg}\alpha.$$

El trabajo elástico del rectángulo con sus dos diagonales es [fórmula (99)]

$$A = \sum \frac{S_n^2 l_n}{2EF_n},$$

cuya suma se extiende a las seis varillas del rectángulo. Considerando S como una magnitud hiperestática y haciendo, según la fórmula (103),

$$\frac{\partial A}{\partial S_2} = 0,$$

se tiene

$$\sum \frac{S_n l_n}{F_n} \cdot \frac{\partial S_n}{\partial S_2} = 0,$$

y como de las cinco ecuaciones estáticas resulta que

$$\frac{\partial S_1}{\partial S_2} = 1, \quad \frac{\partial S_5}{\partial S_3} = \frac{\partial S_6}{\partial S_3} = -\frac{1}{\cos\alpha}, \quad \frac{\partial S_9}{\partial S_3} = \frac{\partial S_{10}}{\partial S_3} = \operatorname{tg}\alpha,$$

y, además, $l_3 = l_4 = a$, $l_9 = l_{10} = a \operatorname{tg}\alpha = h$, $l_5 = l_6 = a/\cos\alpha = l$, se tiene para determinar S_3 la siguiente ecuación:

$$S_3\left[\left(\frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_4}\right)a^3 + \left(\frac{1}{F_5} + \frac{1}{F_6}\right)l^3 + \left(\frac{1}{F_9} + \frac{1}{F_{10}}\right)h^3\right]$$
$$= -\frac{a}{h}\left[\frac{1}{F_4}(P+Q)a^2 + \left(\frac{B}{F_5} + \frac{A}{F_6}\right)l^3 + 2\left(\frac{A}{F_9} + \frac{B}{F_{10}}\right)h^3\right].$$

Una vez conocida S_3, las ecuaciones estáticas permiten deducir los valores S_1, S_5, S_6, S_9, S_{10}.

477. El trabajo elástico del entramado es [fórmula (99)]

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2EF}\left[S^2 l + S_1^2 l_1 + 2S_2^2 l_2 + 2S_3^2 l_3\right],$$

siendo l, l_1, l_2, l_3 y S, S_1, S_2, S_3 las longitudes y tensiones de las correspondientes varillas. Consideremos, por ejemplo, S_3 como hiperestática y hallemos la expresión $\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial S_3} = 0$; tendremos

$$S l \frac{\partial S}{\partial S_3} + S_1 l_1 \frac{\partial S_1}{\partial S_3} + 2S_2 l_2 \frac{\partial S_2}{\partial S_3} + 2S_3 l_3 = 0. \qquad \text{(a)}$$

De las condiciones de equilibrio de los nudos salen las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} S &= -P\operatorname{cotg}\alpha - S_2 l_1/l_2, \\ S_1 &= P\operatorname{cotg}\alpha - S_2 l/l_2, \\ S_2 &= -P/\operatorname{sen}\alpha - S_2 l_3/l_2, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

utilizando las relaciones existentes entre las longitudes de las varillas y los ángulos α y β.

De aquí resulta en primer lugar:

$$\frac{\partial S}{\partial S_3} = -\frac{l_1}{l_2}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial S_3} = -\frac{l}{l_2}, \quad \frac{\partial S_2}{\partial S_3} = -\frac{l_3}{l_2},$$

que junto con la ecuación (a) dan

$$S_3 = -\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha}\,\frac{2l_2^2 l_3}{l l_2^2 + l^2 l_1 + 2l_3^3 + 2l_3^2}.$$

Las tensiones restantes se calculan por medio de las ecuaciones (b).

478. El pórtico es doblemente indeterminado. La ecuación estática es

$$M_A + M_B = Hh.$$

Sean J_1, J_2 los m. de i. de las barras $\overline{AB} = \overline{DC}$ y $\overline{BC}$; el trabajo elástico de la barra $\overline{AB}$ o $\overline{DC}$ es

$$\mathsf{A}_1 = \frac{1}{2EJ_1}\int_0^h (M_A - Hx)^2\,dx,$$

y el de la barra $\overline{BC}$,

$$A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2EJ_2} \int_0^{l/2} \left(-M_B + qax - \frac{1}{2} q x^2\right)^2 dx,$$

en donde qa es el valor de la reacción vertical del apoyo en A y D. El trabajo elástico total del pórtico es

$$A = 2A_1 + A_2$$

Haciendo

$$\frac{\partial A}{\partial H} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial M_B} = 0,$$

se obtienen las ecuaciones

$$3M_B h^2 = H 2h^3, \tag{b}$$

$$M_B \left(\frac{h}{J_1} + \frac{l}{2J_2}\right) = \frac{Hh^2}{2J_1} + \frac{ql^3}{24J_2}, \tag{c}$$

en las que se ha tenido en cuenta que

$$\frac{\partial M_B}{\partial H} = h, \quad \frac{\partial M_A}{\partial M_B} = -1.$$

Para el empuje H y el momento M_B resulta de las ecuaciones (b) y (c)

$$H = \frac{3M_B}{2h} = \frac{ql^2}{4h(k+2)}, \quad k = \frac{J_2 h}{J_1 l},$$

y después se deduce M_A de la ecuación (a).

479. La vigueta $\overline{AB}$ sufre, además de la carga, los momentos en sus extremos $M_0 = Hh$. El momento flector entre A y P es $M_1 = -M_0 + Px$, y entre las dos cargas

$$M_2 = -M_0 + Pa.$$

El trabajo elástico de la vigueta es, pues, según las fórmulas (99) y (100),

$$A_1 = \frac{1}{EJ_1} \left[\int_0^a M_1^2 dx + \int_a^{l/2} M_2^2 dx\right].$$

$M_0 = M_A$

El montante $\overline{AD}$ está solicitado en A por el momento M_0, y en D por la fuerza H; el momento flector a la distancia x de D es Hx, y su trabajo elástico es, por lo tanto, según la fórmula (100),

$$A_2 = \frac{1}{2EJ_2} \int_0^h (Hx)^2 dx.$$

El trabajo elástico de la riostra $\overline{CD}$ es, finalmente, según la fórmula (99),

$$A_3 = \frac{H^2 l}{2EF_3}.$$

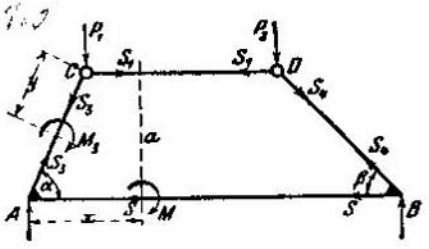
El trabajo total de la estructura es

$$A = A_1 + 2A_2 + A_3.$$

Haciendo $\frac{\partial A}{\partial H} = 0$ y efectuando las integraciones, resulta

$$H = P\,\frac{ah\,(l - a)}{lh^3/2 + J_1\,[l/F_3 + 2h^3/3J_2]}.$$

480. Las ecuaciones estáticas son:



$$\left.\begin{aligned} P_1 \operatorname{sen}\alpha + S_2 &= S_1 \cos\alpha, \\ P_2 \operatorname{sen}\beta + S_4 &= S_1 \cos\beta, \\ S + S_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Todas las piezas, excepto la $\overline{CD}$, están sometidas a esfuerzos normales y de flexión. Los momentos flectores son:

en $\overline{AB}$, $\quad M = Ax - P_1\,(x - l_2 \cos\alpha) + S_1 a$;

en $\overline{AC}$, $\quad M_2 = (S_1 \operatorname{sen}\alpha + P_1 \cos\alpha)\,y$, $\quad$ y del mismo modo

en $\overline{BD}$, $\quad M_4 = (S_1 \operatorname{sen}\beta + P_2 \cos\beta\, z)$.

El trabajo elástico es

$$A = \frac{1}{2EF}\,[S^2 l + S_1^2 l_1 + S_2^2 l_2 + S_4^2 l_4]$$

$$+ \frac{1}{2EJ}\left[\int_0^l M^2 dx + \int_0^{l_2} M_2^2 dy + \int_0^{l_4} M_4^2 dz\right],$$

en donde F es la sección de las barras, y J el m. de i. El entramado es simplemente indeterminado.

Haciendo $\frac{\partial A}{\partial S} = 0$ y sacando de las tres primeras ecuaciones

$$\frac{\partial S_1}{\partial S} = -1, \quad \frac{\partial S_2}{\partial S} = -\cos\alpha, \quad \frac{\partial S_4}{\partial S} = -\cos\beta,$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial S} = -a, \quad \frac{\partial M_2}{\partial S} = -y \operatorname{sen}\alpha, \quad \frac{\partial M_4}{\partial S} = -z \operatorname{sen}\beta,$$

se obtiene primeramente

$$\frac{J}{F}\,[Sl - S_1 l_1 - S_2 l_2 \cos\alpha - S_4 l_4 \cos\beta] - a\int_0^l M\,dx$$

$$- \operatorname{sen}\alpha \int_0^{l_2} M_2\, y\, dy - \operatorname{sen}\beta \int_0^{l_4} M_4\, z\, dz = 0.$$

Efectuando las integraciones y observando que

$$Al = P_1\,(l - l_2 \cos\alpha) + P_2 l_4 \cos\beta,$$

y expresando con ayuda de las tres primeras ecuaciones S, S_3, S_4 en función de S_1, se obtiene para ésta la ecuación

$$S_1\left\{\frac{J}{F}(l + l_1 + l_2\cos^2\alpha + l_4\cos^2\beta) + a^2\left(l + \frac{l_2 + l_4}{3}\right)\right\}$$

$$= P_1 a\cos\alpha\left(\frac{J}{F} - \frac{l l_2}{2} - \frac{l_2^2}{3}\right) + P_2 a\cos\beta\left(\frac{J}{F} - \frac{l l_4}{2} - \frac{l_4^2}{3}\right),$$

lo cual permite deducir S, S_3 y S_4, así como los momentos

$$M_A = P_1 l_2\cos\alpha + S_1 a,$$

$$M_B = P_2 l_4\cos\beta + S_1 a.$$

481. Para la sección 1, cerca de a, la ecuación de momentos respecto a A da

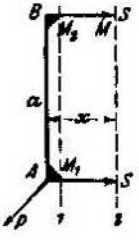
$$M_1 + M_2 + Sa = 0. \qquad \text{(a)}$$

La proyección de las fuerzas en la dirección de las piezas cortadas S da

$$S = P/2\sqrt{2}.$$

El momento flector en el punto M es

$$M = M_2 + Sx,$$



siendo S el esfuerzo axial en las barras. El trabajo elástico total es

$$A = 4\frac{S^2 a}{2EF} + 4\frac{1}{2EJ}\int_0^a M^2 dx.$$

Haciendo

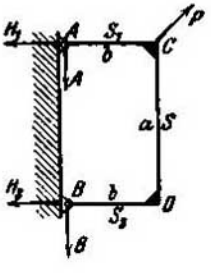
$$\frac{\partial A}{\partial M_2} = 0, \quad \text{resulta} \quad \int_0^a M\frac{\partial M}{\partial M_2}dx = 0,$$

o

$$\int_0^a (M_2 + Sx)\,dx = 0, \quad M_2 a + Sa^2/2 = 0,$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones (a) y (b),

$$M_1 = M_2 = -Pa/4\sqrt{2}.$$



482. Ecuaciones estáticas:

$$A + B = P\cos\alpha,$$

$$S = B = P\cos\alpha - A,$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 = H_1 &= P\left(\operatorname{sen}\alpha - \frac{b}{a}\cos\alpha\right), \\ S_2 = H_2 &= P\frac{b}{a}\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

$$M_C = -Ab, \quad M_D = -Bb. \qquad \text{(b)}$$

Momento flector en $\overline{AC}$, $M_1 = -Ax$;

» » en $\overline{BD}$, $M_2 = -Bx$;

» » en $\overline{CD}$, $M = -Bb + H_1x$

x es la distancia de la sección considerada a los puntos A, B, D, respectivamente. El trabajo elástico es

$$A = \frac{1}{2EF}(S_1^2 b + S_2^2 b + S^2 a) + \frac{1}{2EJ}\left(\int_0^b M_1^2 dx + \int_0^b M_2^2 dx + \int_0^a M^2 dx\right)$$

Haciendo $\frac{\partial A}{\partial B} = 0$, se tiene

$$\frac{Ba}{F} + \frac{1}{J}\left\{\int_0^b M_1 \frac{\partial M_1}{\partial B} dx + \int_0^b M_2 \frac{\partial M_2}{\partial B} dx + \int_0^a M \frac{\partial M}{\partial B} dx\right\} = 0.$$

Ahora bien:

$$\frac{\partial M_1}{\partial B} = -\frac{\partial A}{\partial B} x = x,$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial B} = -x,$$

$$\frac{\partial M}{\partial B} = -b.$$

Efectuando las integraciones, resulta

$$S = B = P\cos\alpha \frac{Fb^2(3a + 2b)}{6aJ + 2Fb^2(3a + 2b)}$$

$$A = P\cos\alpha \frac{6aJ + Fb^2(3a + 2b)}{6aJ + 2Fb^2(3a + 2b)}.$$

M_C y M_D se determinan seguidamente por la ecuación (b).

483. Ecuaciones estáticas: $V_1 = V_2 = V$,

$$H_1 + H_2 = qh, \quad H = H_2.$$

y

$$-M_1 - Hh - Va + qh^2/2 = 0,$$

$$-M_2 + Hh - Va = 0.$$

El pórtico es doblemente indeterminado.

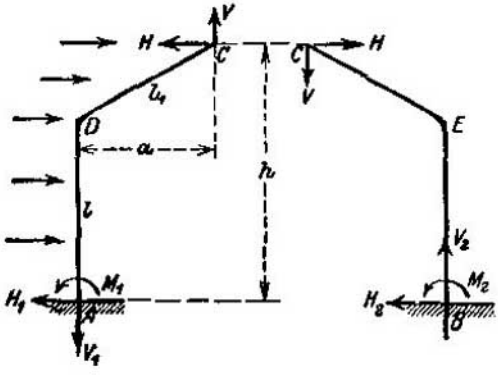
Si J es el m. de I., los trabajos elásticos de las piezas $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EB}$ serán, sin tener en cuenta las fuerzas normales,

$$A_1 = \frac{1}{2EJ}\int_0^l \left(-M_1 + H_1x - \frac{qx^2}{2}\right)^2 dx,$$

$$A_2 = \frac{1}{2EJ}\int_0^{l_1} \left[-x(H\,\text{sen}\,\alpha + V\cos\alpha) + \frac{1}{2}qx^2\,\text{sen}^2\,\alpha\right]^2 dx,$$

$$A_3 = \frac{1}{2EJ}\int_0^{l_1} x^2 (H \operatorname{sen} \alpha - V \cos \alpha)^2 \, dx.$$

$$A_4 = \frac{1}{2EJ}\int_0^{l} (-M_1 + H_1 x)^2 \, dx.$$



Haciendo

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

y

$$\frac{\partial A}{\partial H} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial V} = 0,$$

y utilizando, además, las ecuaciones estáticas, se obtienen los siguientes valores para H y V:

$$H \frac{1}{3J}\left[h^3 + l_1^3 \operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen} \alpha)\right] = \frac{q}{16} \frac{h^4 + l_1^4 \operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen} \alpha)}{J},$$

$$V \frac{a^3}{3J}(3l + l_1) = \frac{qa}{48} \frac{4l(3h^2 - 3hl + l^2) + 3l_1^3 \operatorname{sen}^2 \alpha}{J}.$$

Las ecuaciones estáticas nos suministran H_1, V_1, M_1, H_2, V_2, M_2. Los momentos en los vértices D y E son:

$$M_3 = \frac{1}{2} q l_1^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - l_1 (H \operatorname{sen} \alpha + V \cos \alpha),$$

$$M_4 = l_1 (H \operatorname{sen} \alpha - V \cos \alpha).$$

La fuerza en la articulación C es la suma de H y V.

484. Cortando el bastidor por un plano horizontal e introduciendo en los respectivos cortes las fuerzas normales S y las cortantes Q, tendremos la relación

$$P - 2S \cos \alpha + 2Q \operatorname{sen} \alpha = 0. \qquad \text{(a)}$$

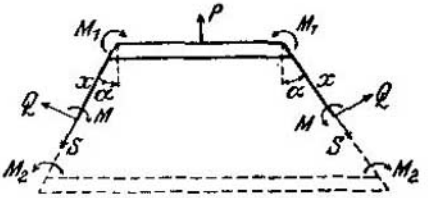
Por otra parte, el momento en la sección del corte es

$$M = Qx + M_1$$

y, por lo tanto,

$$M_2 = Ql + M_1. \tag{b}$$

Las dos ecuaciones (a) y (b) son las únicas que suministra la Estática. El bastidor es hiperestático con dos grados de indeterminación. Su trabajo elástico es



$$A = \frac{S^2 l}{EF} + \frac{1}{EJ}\int_0^l M^2 dx,$$

siendo F y J, respectivamente, la sección y el m. de i. de las partes laterales.

Haciendo

$$\frac{\partial A}{\partial Q} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial M_1} = 0,$$

se obtiene, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial S}{\partial Q} = \operatorname{tg} \alpha, \qquad \frac{\partial M}{\partial Q} = x, \qquad \frac{\partial S}{\partial M_1} = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial M_1} = 1,$$

las expresiones

$$S = \frac{P}{2}\,\frac{F l^2 \cos \alpha}{12 J \operatorname{sen}^2 \alpha + F l^2 \cos^2 \alpha},$$

$$M_1 = -M_2 = -\frac{Ql}{2} = Pl\,\frac{3 J \operatorname{sen} \alpha}{12 J \operatorname{sen}^2 \alpha + F l^2 \cos^2 \alpha}.$$

485. Solución semejante a la del problema anterior. Ecuaciones estáticas:

$$M_0 = Hl,$$

$$A + C/2 = qa,$$

$$M_0 + Ca/2 = qa^2/2.$$

El bastidor es simplemente indeterminado. El trabajo elástico de $\overline{AC}$ es

$$A_1 = \frac{1}{2EJ_1}\int_0^a \left(-\frac{C}{2}x + \frac{1}{2}qx^2\right)^2 dx + \frac{H^2 a}{2EF_1},$$

el del montante A es

$$A_2 = \frac{1}{2EJ_2}\int_0^l H^2 x^2 dx + \frac{A^2 l}{2EF_2},$$

y el del C,

$$A_3 = \frac{C^2 l}{2EF_3}.$$

En estas expresiones F_1, F_2, F_3 significan las secciones de $\overline{AC}$ y de los montantes A y C, y J_1, J_2 son los m. de i. respectivos. El trabajo elástico total del bastidor es

$$A = 2A_1 + 2A_2 + A_3.$$

Haciendo $\frac{\partial A}{\partial H} = 0$ y observando que

$$\frac{\partial A}{\partial H} = \frac{l}{a}, \quad \frac{\partial C}{\partial H} = -2\frac{l}{a},$$

se obtiene, utilizando las ecuaciones estáticas, para el empuje H la expresión

$$H\left[\frac{1}{F_2} + \frac{2}{F_1} + \frac{a_2}{F_1 l^2} + \frac{a^2}{3J_1 l} + \frac{a^2}{3J_2}\right] = \frac{qa^2}{2l}\left[\frac{2}{F_2} - \frac{1}{F_2} + \frac{a^2}{12J_1 l}\right].$$

Conocido H, inmediatamente se deducen M_0, A y C de las ecuaciones estáticas.

486. Ecuaciones estáticas:

$$R = P + Q, \qquad P(a + b) = Hc;$$

nudo C.

$$Q + S_1 + (S_2 + S_3)\cos\varphi = 0,$$
$$H + (S_2 - S_3)\operatorname{sen}\varphi = 0;$$

nudo A,

$$H + S_2 \operatorname{sen}\varphi + S_4 = 0.$$

(Como la pieza $\overline{AB}$ está sometida a flexión, en el corte correspondiente al nudo A, además de S_4 hay que introducir el esfuerzo cortante perpendicular a $\overline{AB}$; por eso no utilizamos las proyecciones sobre la vertical.) De aquí se deducen las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} S_2 &= -\frac{1}{2}\left[\frac{Q + S_1}{\cos\varphi} + \frac{H}{\operatorname{sen}\varphi}\right], \\ S_3 &= -\frac{1}{2}\left[\frac{Q + S_1}{\cos\varphi} - \frac{H}{\operatorname{sen}\varphi}\right], \\ S_4 &= \frac{1}{2}\left[(Q + S_1)\operatorname{tg}\varphi - H\right]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Momento flector en $\overline{AD}$ a la distancia x de A:

$$M_1 = S_2 x \cos\varphi. \qquad \text{(b)}$$

Momento flector en $\overline{BD}$ a la distancia x de B:

$$M_2 = P(b + x) - S_3 x \cos\varphi.$$

Momento flector en $\overline{BE}$ a la distancia x de E:

$$M_3 = Px.$$

El trabajo elástico es

$$A = \frac{1}{2E}\left(\frac{S_1^2 c}{F_1} + \frac{S_2^2 d}{F_2} + \frac{S_3^2 d}{F_3} + \frac{2S_4^2 a}{F_4}\right) + \frac{1}{2EJ}\left(\int_0^a M_1^2\,dx + \int_0^a M_2^2\,dx + \int_0^b M_3^2\,dx\right).$$

Haciendo $\frac{\partial A}{\partial S_1} = 0$, se tiene

$$\frac{S_1 c}{F_1} + \frac{S_2 d}{F_2}\frac{\partial S_2}{\partial S_1} + \frac{S_3 d}{F_3}\frac{\partial S_3}{\partial S_1} + \frac{2 S_4 a}{F_4}\frac{\partial S_4}{\partial S_1}$$

$$+ \frac{1}{J}\left\{\int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial S_1}\,dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial S_1}dx + \int_0^a M_3 \frac{\partial M_3}{\partial S_1}\,dx\right\} = 0.$$

Se tiene

$$\frac{\partial S_2}{\partial S_1} = -\frac{1}{2\cos\varphi}, \qquad \frac{\partial S_3}{\partial S_1} = -\frac{1}{2\cos\varphi}, \qquad \frac{\partial S_4}{\partial S_1} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial S_1} = \frac{\partial S_2}{\partial S_1} x\cos\varphi, \qquad \frac{\partial M_2}{\partial S_1} = -\frac{\partial S_3}{\partial S_1} x\cos\varphi, \qquad \frac{\partial M_3}{\partial S_1} = 0.$$

De donde resulta la ecuación

$$\frac{S_1 c}{F_1} - \frac{d}{2\cos\varphi}\left(\frac{S_2}{F_2} + \frac{S_3}{F_3}\right) + \frac{S_4 a}{F_4}\operatorname{tg}\varphi + \frac{P b a^2}{4J} + \frac{(R + S_1)a^3}{6J} = 0,$$

que unida a las tres ecuaciones (a) determinan S_1, S_2, S_3, y S_4.

El momento flector en D viene dado por $S_2\, a\cos\varphi$.

---

487. El trabajo elástico de la viga es, según la fórmula (100),

$$A = \frac{1}{2EJ}\left[\int_0^{l-a} M^2 dx + \int_{l-a}^{l} M_1^2 dx\right];$$

para los momentos flectores hay que sustituir las expresiones:

en el trozo $\overline{BC}$, $\qquad M = Px$;

en el trozo $\overline{CA}$, $\qquad M_1 = (P + P_1)x - P_1(l - a)$.

Efectuando las integraciones, resulta

$$A = \frac{1}{6EJ}\left[P^2 l^3 + P P_1 a^2 (3l - a) + P_1^2 a^3\right];$$

y, por lo tanto, las flechas son:

$$f = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{1}{6EJ}\left[2 P l^3 + P_1 a^2 (3l - a)\right],$$

$$f_1 = \frac{\partial A}{\partial P_1} = \frac{1}{6EJ}\left[P a^2 (3l - a) + 2 P_1 a^3\right].$$

488. El trabajo elástico de la viga se halló en el problema **450**;

$$A = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EJl}.$$

Haciendo, según la fórmula (103), $\frac{\delta A}{\delta P} = f$, resulta

$$f = \frac{1}{3}\frac{Pa^2b^2}{EJl}.$$

489. Según el problema 454, el trabajo elástico para $a = b = l/2$ es

$$A = \frac{l^3}{48EJ}\left[\frac{P^2}{2} + \frac{5Pql}{8} + \frac{q^2l^2}{5}\right];$$

por lo tanto, según la fórmula (103),

$$f = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{l^3}{48EJ}\left[P + \frac{5}{8}ql\right].$$

490. Utilizando el problema 466, la flecha es

$$f = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{1}{3}\frac{Pa^3b^3}{EJl^3} \text{ (según la tabla 2, n.° 3).}$$

491. El trabajo elástico de la viga es, según la fórmula (100),

$$A = \frac{1}{2EJ}\left[\int_0^l M^2dx + \int_0^a M'^2dx'\right],$$

contando las x desde A hacia la derecha y las x' desde C hacia la izquierda. Los momentos flectores son:

en el trozo $\overline{AB}$, $\quad M = Ax = -\frac{Pa}{l}x;$

en el trozo $\overline{CB}$, $\quad M' = Px'.$

Efectuando las integraciones, se tiene

$$A = \frac{1}{6}\frac{P^2a^2(l+a)}{EJ}$$

y la flecha

$$f = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{1}{3}\frac{Pa^2(l+a)}{EJ}.$$

492. El trabajo elástico es para un momento de inercia variable, según la fórmula (100),

$$A = \frac{1}{2E}\int\frac{M^2}{J}dx.$$

Sustituyendo $M = Px$, $J = yh^3/12$, $y = bx/l$ e integrando desde $x = 0$ hasta $x = l$, se tiene

$$A = \frac{3P^2l^3}{bh^3E}$$

y

$$f = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{6Pl^3}{bh^3E}.$$

493. El trabajo elástico es

$$A = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^a M_1^2dx + \int_a^l M_2^2dx\right\},$$

y utilizando el problema **480**

$$M_1 = Ax, \qquad M_2 = (A - P)x + Pa$$

y la reacción del apoyo

$$A = P\,\frac{2l^3 - 3l^2a + a^3}{2l^3}.$$

Efectuando las integraciones, se tiene

$$\mathsf{A} = \frac{P^2a^2(l-a)^2(3l+a)}{24EJl^3},$$

de donde se deduce la flecha bajo la carga

$$f = \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial P} = \frac{Pa^2(l-a)^2\,(3l+a)}{12EJl^3}.$$

494. Introduzcamos, en el punto donde queremos hallar la flecha, una fuerza auxiliar K. El trabajo elástico será, según el problema **454**,

$$\mathsf{A} = \frac{1}{6EJ}\left[\frac{K^2a^2b^2}{l} + \frac{Kqab}{4}(l^2 + ab) + \frac{q^2l^5}{40}\right].$$

Hallando $f = \dfrac{\partial \mathsf{A}}{\partial K}$ y haciendo la fuerza auxiliar $K = 0$, se tiene

$$f = \frac{qab(l^2 + ab)}{24EJ}.$$

---

495. Siendo ϱ el radio de curvatura de la varilla en un punto cualquiera xy (la x se cuenta desde A en la dirección del eje y la y normalmente a ella), tendremos [fórmula (40)]

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{M}{EJ} = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{Py}{EJ},$$

siendo E el coeficiente de elasticidad, J el m. de i. de la sección para una normal al papel pasando por el c. d. g. y M el momento flector.

La ecuación diferencial de la línea elástica [fórmula (41)] es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\varrho_0} - \frac{Py}{EJ} \tag{a}$$

y tiene la solución

$$y = A \operatorname{sen} \omega x + B \cos \omega x - 1/\varrho_0\omega^2, \tag{b}$$

siendo $\omega^2 = P/EJ$. Para determinar las constantes de integración A, B acudiremos, como siempre, a las condiciones límites $x = 0, y = 0$; $x = l/2, \dfrac{dy}{dx} = 0$.

Haciendo ahora

$$\frac{dy}{dx} = A\,\omega \cos \omega x - B\omega \operatorname{sen} \omega x, \tag{c}$$

se tiene

$$B = \frac{1}{\varrho_0\omega^2}, \qquad A = \frac{1}{\varrho_0\omega^2} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2}.$$

Con lo cual la ecuación de la elástica resulta ser

$$y = \frac{1}{\varrho_0\omega^2}\left[\frac{\cos \omega(l/2 - x)}{\cos \omega l/2} - 1\right].$$

y sustituyendo $x = l/2$, la flecha en el punto medio de la varilla es

$$f = \frac{1}{\varrho_0 \omega^2}\left[\frac{1}{\cos \omega l/2}\right].$$

496. Prescindiendo de los esfuerzos tangenciales y teniendo solamente en cuenta el efecto del momento flector en M

$$M = P(r + x) = Pr(1 + \cos\varphi)$$

y la fuerza axial

$$N = P\cos\varphi$$

la carga unitaria normal a la distancia z de la fibra neutra es

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{Mz}{J},$$

siendo F el área de la sección y J su m. de i. respecto a la fibra neutra [fórmula (39)]. El trabajo elástico vale [fórmula (97)]

$$A = \frac{1}{2E}\int \sigma^2 dV = \frac{P^2}{2E}\int\int\left[\frac{\cos\varphi}{F} - \frac{r(1+\cos\varphi)z}{J}\right]^2 dF\,ds.$$

Haciendo $ds = (r + z)d\varphi$ y observando que

$$\int z\,dF = 0, \quad \int z^2 dF = J, \quad \int z^3 dF = 0,$$

se tiene

$$A = \frac{P^2 r}{2E}\left\{\frac{1}{F}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi + \frac{r^2}{J}\int_{-\pi}^{+\pi}(1+\cos\varphi)^3 d\varphi - \frac{2}{F}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos\varphi(1+\cos\varphi)d\varphi\right\}$$

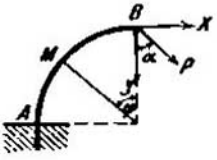
y

$$A = \frac{\pi}{2}\frac{P^2 r}{E}\left(\frac{3r^2}{J} - \frac{1}{F}\right).$$

Igualando a $Pf/2$, resulta

$$P = f\frac{E}{\pi r(3r^2/J - 1/F)}.$$

497. Descomponiendo P en $X = P\,\text{sen}\,\alpha$ e $Y = P\cos\alpha$, el momento flector en la sección correspondiente a φ es



$$M = Xr(1 - \cos\varphi) + Yr\,\text{sen}\,\varphi,$$

y el trabajo elástico (prescindiendo de las fuerzas normales y tangenciales) vale

$$A = \frac{1}{2EJ}\int_0^{\pi/2} M^2 ds, \quad ds = r\,d\varphi,$$

de donde se deducen los desplazamientos

en dirección horizontal $\quad u = \dfrac{\partial A}{\partial X} = \dfrac{r}{EJ}\displaystyle\int_0^{\pi/2} M\frac{\partial M}{\partial X}d\varphi,$

y en dirección vertical $\quad v = \dfrac{\partial A}{\partial Y} = \dfrac{r}{EJ}\displaystyle\int_0^{\pi/2} M\frac{\partial M}{\partial Y}d\varphi.$

Efectuando las integrales tendremos

$$u = \frac{\partial A}{\partial X} = \frac{Pr^3}{EJ}\left[\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2}\cos\alpha\right],$$

$$v = \frac{\partial A}{\partial Y} = \frac{Pr^3}{2EJ}\left[\operatorname{sen}\alpha + \frac{\pi}{2}\cos\alpha\right].$$

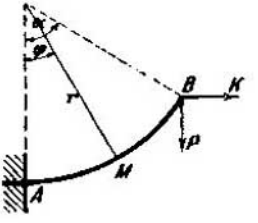
En particular para $\alpha = 0$

$$u_0 = \frac{Pr^3}{2EJ}, \quad v_0 = \frac{\pi Pr^3}{4EJ}.$$

498. Como ha de calcularse el desplazamiento horizontal de B, introduzcamos en B una fuerza auxiliar horizontal K, que después anularemos. El momento flector en una sección cualquiera φ es

$$M = Pr(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\varphi) + Kr(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

y el trabajo elástico en toda la varilla (prescindiendo de las fuerzas axiales y tangenciales) es, según la fórmula (104),



$$A = \frac{1}{2EJ}\int_0^a M^2 ds, \qquad ds = r\,d\varphi.$$

El descenso de B es, pues, según la fórmula (103),

$$f = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{r}{EJ}\int_0^a M\frac{\partial M}{\partial P}d\varphi,$$

en donde

$$\frac{\partial M}{\partial P} = r(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\varphi),$$

y haciendo $K = 0$, resulta

$$f = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{Pr^3}{EJ}\left[\alpha\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\operatorname{sen}2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\right].$$

El desplazamiento horizontal de B es, pues,

$$u = \frac{\partial A}{\partial K} = \frac{r}{EJ}\int_0^a M\frac{\partial M}{\partial K}d\varphi,$$

en donde

$$\frac{\partial M}{\partial K} = r(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

y haciendo $K = 0$, resulta

$$u = \frac{\partial A}{\partial K} = \frac{Pr^3}{EJ}\left[-1 + \frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\alpha + \cos\alpha - \alpha\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right.$$

499. Las reacciones de los apoyos son $A = B = G/2$, siendo G el peso de la plancha.

Sea q el peso por unidad de longitud de arco, $q = G/r\pi$. El momento flector en la sección φ es

$$M = -Pr \operatorname{sen} \varphi + Ar(1 - \cos \varphi) - \int_0^{\varphi} qr(\cos \psi - \cos \varphi) ds.$$

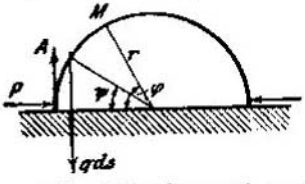
y haciendo $ds = r d\psi$, se deduce

$$M = -Pr \operatorname{sen} \varphi + \frac{Gr}{2}(1 - \cos \varphi) - qr^2 (\operatorname{sen} \varphi - \varphi \cos \varphi),$$

y el trabajo elástico, según la fórmula (100),

$$A = 2 \frac{1}{2EJ} \int_0^{\pi/2} M^2 ds, \qquad ds = r d\varphi.$$

Suponiendo el desplazamiento de P igual cero, se tiene, según la fórmula (103),

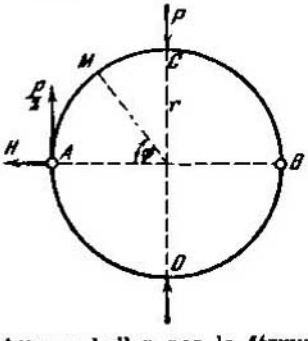


$$f = \frac{\partial A}{\partial P} = 0 \quad \text{ó} \quad \int_0^{\pi/2} M \frac{\partial M}{\partial P} d\varphi = 0,$$

y efectuando la integración,

$$P = G/2\pi.$$

500. Estudiemos el cuadrante AC. Las componentes de la fuerza que actúa en la articulación A valen



$$A = P/2 \qquad \text{y} \qquad H = 0;$$

el momento flector en la sección M,

$$M = \frac{P}{2} r(1 - \cos \varphi) + Hr \operatorname{sen} \varphi.$$

y el trabajo elástico en el cuadrante, según la fórmula (104), vale

$$A = \frac{1}{2EJ} \int_0^{\pi/2} M^2 ds, \qquad ds = r d\varphi.$$

Las variaciones de longitud de los diámetros se hallan por la fórmula (103). En la dirección de AB tendremos

$$u = 2 \frac{\partial A}{\partial H} = \frac{2r}{EJ} \int_0^{\pi/2} M \frac{\partial M}{\partial H} d\varphi,$$

y sustituyendo y haciendo $H = 0$, resulta $u = \frac{Pr^3}{2EJ}$ en la dirección de H; hay, pues, aumento de diámetro. Para la dirección CD tendremos

$$v = 2 \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{2r}{EJ} \int_0^{\pi/2} M \frac{\partial M}{\partial P} d\varphi,$$

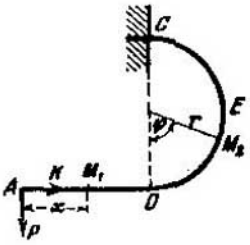
de donde haciendo $H = 0$ y sustituyendo, resulta $v = \left(\frac{3}{8}\pi - 1\right) \frac{Pr^3}{EJ}$ en dirección de P, es decir que hay disminución de diámetro.

501. Por razón de simetría, la espira permanece horizontal en C; por lo tanto, el trozo $ADEC$ puede considerarse como empotrado en C. El momento flector en una sección cualquiera entre A y D vale $M_1 = -Px$; el de una sección φ de la semicircunferencia es

$$M_2 = -P(l + r \operatorname{sen} \varphi) - Kr(1 - \cos \varphi),$$

introduciendo en A la fuerza auxiliar horizontal K que luego anularemos. El trabajo elástico (prescindiendo de las fuerzas normales y tangenciales) es, según la fórmula (104),

$$A = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^{\pi} M_2^2 ds + \int_0^{l} M_1^2 dx\right\}.$$



Ahora bien: según la fórmula (103) el desplazamiento de A vale

$$u = \frac{\partial A}{\partial K} = \frac{Pr^2}{EJ}(l\pi = 2r),$$

habiendo hecho $K = 0$ después de efectuar la integración. La aproximación de los puntos A y B vale, naturalmente, el doble.

El descenso de A vale

$$v = \frac{\partial A}{\partial A} = \frac{P}{EJ}\left\{\frac{l^3}{2} + l^2 r\pi + 4lr^2 + \frac{\pi}{2} r^3\right\}.$$

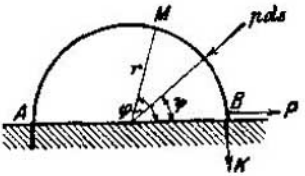
502. Se introducen en el punto A, según la tangente a la circunferencia, dos fuerzas auxiliares K; el momento flector en la sección φ es

$$M = Kr(1 - \cos \varphi) + l\int_{\psi=0}^{\varphi} pr \operatorname{sen}(\varphi - \psi)\, ds.$$

Haciendo $ds = r d\psi$ y efectuando la integración, se halla

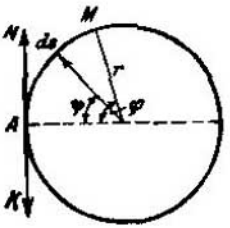
$$M = Kr(1 - \cos \varphi) + pr^2 l(1 - \cos \varphi).$$

El trabajo elástico del depósito es, según la fórmula (104),



$$A = 2\,\frac{1}{2EJ}\int_0^{\pi} M^2 ds,$$

y la anchura de la fuga en A, según la fórmula (103),



$$f = \frac{\partial A}{\partial K} = \frac{2r}{EJ}\int_0^{\pi} M \frac{\partial M}{\partial K}\, d\varphi.$$

Sustituyendo ahora en M el valor $K = 0$, resulta

$$f = \frac{\partial A}{\partial K} = \frac{3p\pi r^4 l}{EJ}.$$

508. Introduzcamos en B y en dirección vertical la fuerza auxiliar K. El momento flector en una sección cualquiera φ vale

$$M = Kr(1 - \cos\varphi) - Pr \operatorname{sen}\varphi + \int_{\psi=0}^{\varphi} pr \operatorname{sen}(\varphi - \psi)\, ds, \qquad ds = r\,d\psi.$$

$$M = Kr(1 - \cos\varphi) - Pr \operatorname{sen}\varphi + pr^2(1 - \cos\varphi).$$

El trabajo elástico del resorte es, según la fórmula (104),

$$A = \frac{1}{2EJ}\int_0^{\pi} M^2 ds, \qquad ds = r\,d\varphi.$$

Hallando

$$\frac{\partial A}{\partial K} = \frac{r}{EJ}\int_0^{\pi} M \frac{\partial M}{\partial K}\, d\varphi,$$

y como $\frac{\partial M}{\partial K} = r(1 - \cos\varphi)$, si después de efectuar la integración hacemos $K = 0$, resulta

$$\frac{\partial A}{\partial K} = \frac{r^3}{EJ}\left(\frac{3\pi}{2} pr - 2P\right).$$

Si B ha de permanecer en la superficie AB, esta expresión debe anularse; luego

$$p = \frac{4P}{3\pi r}.$$

Para el desplazamiento de B en el plano AB tendremos [fórmula (103)]

$$= \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{r}{EJ}\int_0^{\pi} M \frac{\partial M}{\partial P}\, d\varphi = \frac{r^3}{EJ}\left(\frac{P\pi}{2} - 2pr\right)$$

al hacer nuevamente $K = 0$. Conocido el valor de p se deduce el valor del desplazamiento de B

$$f = \frac{Pr^3}{EJ}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{3\pi}\right) = 0{,}7220\,\frac{Pr^3}{EJ}.$$

El momento flector del resorte es nulo en B y alcanza su máximo negativo para

$$\operatorname{tg}\varphi = 3\pi/4\ ),$$

siendo su valor

$$-M_{\text{máx}} = \frac{Pr}{3\pi}\left[4 - \sqrt{16 + 9\pi^2}\right] = -0{,}6619\,Pr;$$

después para $\operatorname{tg}\varphi/2 = 3\pi/4$ se anula de nuevo y tiene su valor máximo en A

$$+M_{\text{máx}} = 8\,Pr/3\pi = 0{,}8488\,Pr.$$

504. La solución se encuentra con ayuda de los resultados del problema **497**. Supongamos que u y v son los desplazamientos de B en dirección horizontal y vertical, y sean X_1 e Y_1 las fuerzas que han de aplicarse al fleje AB y X_2 e Y_2 las correspondientes del fleje CB para producir aquellos desplazamientos. Las expresiones finales del problema **497** dan para el fleje AB las siguientes relaciones:

$$u = \frac{r^3}{2EJ}\left[\left(\frac{3\pi}{2} - 4\right) X_1 + Y_1\right],$$

$$v = \frac{r^3}{2EJ}\left[X_1 + \frac{\pi}{2} Y_1\right].$$

Del mismo modo se obtienen para el fleje CB las ecuaciones

$$u = \frac{r^3}{2EJ}\left[X_2 \frac{\pi}{2} - Y_2\right],$$

$$v = \frac{r^3}{2EJ}\left[-X_2 + Y_2\left(\frac{3\pi}{2} - 4\right)\right].$$

Estas ecuaciones permiten determinar $X_1 + X_2$ e $Y_1 + Y_2$, que serán las componentes X, Y de P, y así se tiene

$$X = X_1 + X_2 = \frac{16EJ}{r^3}\,\frac{u(\pi - 2)}{3\pi^2 - 8\pi - 4},$$

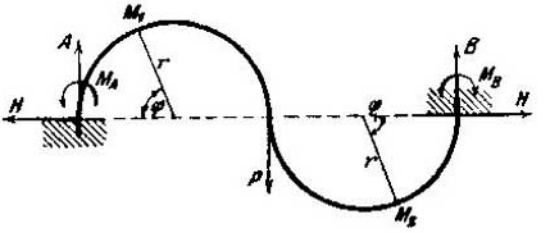
$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{16EJ}{r^3}\,\frac{v(\pi - 2)}{3\pi^2 - 8\pi - 4};$$

dividiendo una expresión por la otra, resulta $X : Y = u : v$; es decir que la dirección del desplazamiento es la misma que la de la fuerza P. Su magnitud es

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{\pi - 2}\,\frac{Pr^3}{16EJ}.$$

505. Las ecuaciones de la Estática dan

$$A = B = P/2, \qquad M_A = M_B.$$



Los momentos flectores en las secciones 1 y 2 de la varilla son:

$$M_1 = -M_A + \frac{Pr}{2}(1 - \cos\varphi) + Hr \operatorname{sen}\varphi,$$

$$M_2 = M_B - \frac{Pr}{2}(1 - \cos\varphi) + Hr \operatorname{sen}\varphi.$$

El trabajo elástico en la varilla es, según la fórmula (104),

$$A = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^{\pi} M_1^2 ds + \int_0^{\pi} M_2^2 ds\right\}$$

y haciendo

$$\frac{\partial A}{\partial M_A} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial H} = 0,$$

en donde

$$\frac{\partial M_1}{\partial M_A} = -1, \qquad \frac{\partial M_2}{\partial M_A} = +1, \qquad \frac{\partial M_1}{\partial H} = \frac{\partial M_2}{\partial H} = r \operatorname{sen} \varphi,$$

se tiene

$$M_A = Pr/2, \qquad H = 0.$$

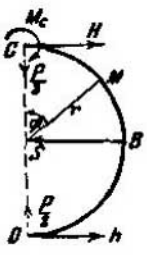
Con estos valores, el recorrido de la fuerza dada es, según la fórmula (103),

$$f = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^{\pi} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} ds + \int_0^{\pi} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} ds\right\} = \frac{\pi}{4}\frac{Pr^3}{EJ}.$$

506. Cortando por $\overline{CD}$ se tiene

$$S = 2H,$$

siendo H la fuerza axial desconocida en C.



El momento flector en la sección φ es

$$M = M_C - \frac{P}{2} r \operatorname{sen} \varphi + Hr(1 - \cos \varphi),$$

y el trabajo de deformación del anillo es, según las fórmulas (99) y (104),

$$A = 4\frac{1}{2EJ}\int_0^{\pi/2} M^2 ds + \frac{S^2 2r}{2EF},$$

siendo F el área de la sección del tirante y J el m. de i. de la sección del anillo.

Haciendo

$$\frac{\partial A}{\partial M_C} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial H} = 0,$$

en donde

$$\frac{\partial M}{\partial M_C} = 1, \qquad \frac{\partial S}{\partial M_C} = 0; \qquad \frac{\partial M}{\partial H} = r(1 - \cos \varphi), \qquad \frac{\partial S}{\partial H} = 2,$$

se obtienen dos ecuaciones, de las que se deduce

$$M_C = 2Pr\frac{\pi - 3 + 4J/Fr^2}{\pi^2 - 8 + 8\pi J/Fr^2},$$

$$H = P\frac{4 - \pi}{\pi^2 - 8 + 8\pi J/Fr^2}, \qquad S = 2H,$$

y de aquí

$$M_B = M_C - Pr/2 + Hr = -\frac{Pr}{2}\left[1 - 2\frac{\pi - 2 + 8J/Fr^2}{\pi^2 - 8 + 8\pi J/Fr^2}\right].$$

507. Podemos suponer cortado el anillo según $\overline{CD}$, introduciendo la fuerza horizontal H y el momento M_C. En estas condiciones, el momento flector en el cuadrante superior vale

$$M_1 = M_C + Hr(1 - \cos\varphi);$$

en el cuadrante inferior,

$$M_2 = M_C + Hr(1 + \cos\varphi) - \frac{Pr}{2}(1 - \operatorname{sen}\varphi).$$

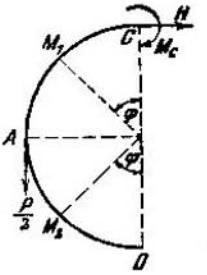
El trabajo elástico del semianillo es, según la fórmula (104),

$$A = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^{\pi/2} M_1^2 ds + \int_0^{\pi/2} M_2^2 ds\right\}.$$

Haciendo $\frac{\partial A}{\partial M_C} = 0$ y $\frac{\partial A}{\partial H} = 0$ y utilizando, además, las relaciones

$$\frac{\partial M_1}{\partial M_C} = 1, \quad \frac{\partial M_2}{\partial M_C} = 1; \quad \frac{\partial M_1}{\partial H} = r(1 - \cos\varphi), \quad \frac{\partial M_2}{\partial H} = r(1 + \cos\varphi),$$

se obtienen las dos ecuaciones



$$M_C + Hr = Pr\frac{\pi - 2}{4\pi},$$

$$M_C + \frac{3}{2}Xr = Pr\frac{\pi - 1}{4\pi},$$

de donde

$$H = \frac{P}{2\pi} \quad \text{y} \quad M_C = -Pr\frac{4 - \pi}{4\pi} = -0{,}0683\,Pr.$$

El máximo momento flector en el anillo corresponde a la sección D, y vale

$$M_D = M_C + H\cdot 2r - Pr/2 = -Pr/4.$$

Para calcular el descenso de P se utiliza el artificio de introducir en C una fuerza vertical V dirigida hacia abajo, que después se anula.

Así se tiene

$$M_1 = M_C + Hr(1 - \cos\varphi) + Vr\operatorname{sen}\varphi,$$

$$M_2 = M_C + Hr(1 + \cos\varphi) + Vr\operatorname{sen}\varphi - \frac{Pr}{2}(1 - \operatorname{sen}\varphi).$$

Hallando ahora

$$\frac{\partial A}{\partial V} = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^{\pi/2} M_1\frac{\partial M_1}{\partial V}ds + \int_0^{\pi/2} M_2\frac{\partial M_2}{\partial V}ds\right\},$$

siendo

$$\frac{\partial M_1}{\partial V} = r\operatorname{sen}\varphi, \qquad \frac{\partial M_2}{\partial V} = r\operatorname{sen}\varphi,$$

y haciendo después $V = 0$, se obtiene el descenso de C, o sea el acortamiento del diámetro $\overline{CD}$

$$v = \frac{\partial A}{\partial V} = \frac{\pi^2 - 8}{8\pi}\frac{Pr^3}{EJ} = 0{,}0744\frac{Pr^3}{EJ}.$$

Del mismo modo se procede para calcular el desplazamiento lateral u del punto A. Se introduce en A una fuerza auxiliar horizontal K dirigida hacia la izquierda, y se tiene

$$M_1 = M_C + (H + K/2)\, r\,(1 - \cos\varphi),$$

$$M_2 = M_C + \left(H + \frac{K}{2}\right) r\,(1 + \cos\varphi) - K r \cos\varphi - \frac{P r}{2}(1 - \operatorname{sen}\varphi).$$

Luego se hace

$$\frac{\partial A}{\partial K} = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^{\pi/2} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial K}\, ds + \int_0^{\pi/2} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial K}\, ds\right\},$$

siendo

$$\frac{\partial M_1}{\partial K} = \frac{r}{2}(1 - \cos\varphi), \qquad \frac{\partial M_2}{\partial K} = \frac{r}{2}(1 - \cos\varphi),$$

y haciendo después $K = 0$, se tiene

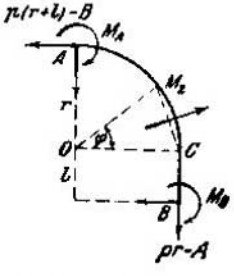
$$u = \frac{\partial A}{\partial K} = \frac{4 - \pi}{8\pi}\frac{P r^3}{EJ} = 0{,}0341\,\frac{P r^3}{EJ}.$$

El aumento del diámetro $\overline{AB}$ vale el doble.

508. Como han de calcularse los desplazamientos de los puntos A y B, introduciremos en dirección tangencial las fuerzas auxiliares A en el punto A, y B en el punto B, que después anularemos. En las secciones A y B actúan, además, las fuerzas $p(r + l)$ y pr, respectivamente, por efecto de la presión interior p.

A la distancia x de B el momento flector vale

$M_1 = M_B + Bx - px^2/2$, siendo válida esta expresión de $x = 0$ a $x = l$;



en el punto M_2 correspondiente al ángulo φ, el momento flector es

$$M_2 = M_B + B\,(l + r \operatorname{sen}\varphi) + (pr - A)\, r\,(1 - \cos\varphi)$$
$$- p\,l\,(l/2 + r \operatorname{sen}\varphi) - \frac{1}{2}\, p \cdot \overline{M_2C}^2.$$

Los dos últimos términos de esta igualdad proceden de la presión interior sobre los trozos $\overline{BC}$ y $\overline{M_2C}$. Como $\overline{M_2C} = 2r \operatorname{sen}\varphi/2$, se deduce

$$M_2 = M_B + B\,(l + r \operatorname{sen}\varphi) - A\,r\,(1 - \cos\varphi)$$
$$- pl\,(l/2 + r \operatorname{sen}\varphi).$$

El trabajo elástico del cuadrante AB es, pues,

$$A = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^{l} M_1^2\, dx + \int_0^{\pi/2} M_2^2\, r\, d\varphi\right\}.$$

Haciendo $\dfrac{\partial A}{\partial M_B} = 0$ y siendo $A = 0$, $B = 0$, se obtiene

$$\int_0^{l} M_1 dx + \int_0^{\pi/2} M_2 r\, d\varphi = 0,$$

de donde

$$M_B = \frac{p\,l\,r\,l\pi + 4r^2 + 2\,l^2/3}{2l + r\pi}.$$

El valor de $M_A = -M_B + prl + pl^2/2$ se halla igualando a cero la suma de momentos respecto a O.

El desplazamiento de B es, pues,

$$\frac{\partial A}{\partial B} = \frac{1}{EJ}\left[\int_0^l M_1 \frac{\partial M_1}{\partial B}\,dx + \int_0^{\pi/2} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial B}\,r\,d\varphi\right].$$

Efectuando las integraciones y haciendo después $A = 0$, $B = 0$, se tiene para el desplazamiento de B

$$-\frac{pl}{24EJ(2l + r\pi)}\,[r\pi(5l^3 + 12r^2l + 6r^3\pi) + 2(l^4 - 24r^4 + 20r^2l^2)].$$

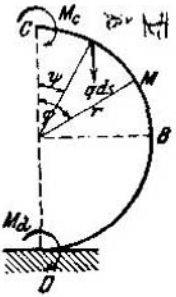
El desplazamiento de A es

$$\frac{\partial A}{\partial A} = \frac{1}{EJ}\int_0^{\pi/2} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial A}\,r\,d\varphi.$$

Efectuando la integración y haciendo después $A = 0$, $B = 0$, se tiene para el desplazamiento de A

$$\frac{plr^2}{6EJ(2l + r\pi)}\,[\pi(2l^2 - 3r^2) + 2(6r^2 + 3rl - 2l)].$$

509. Cortemos el tubo por el plano vertical $\overline{CD}$ de modo que CBD sea la semisección. Introduciendo en C y D los momentos M_C y M_D (que sustituyen el efecto del corte), el momento flector en una sección cualquiera M vale



$$M = M_C - \int_{\psi=0}^{\varphi} qr(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\psi)\,ds - Hr(1 - \cos\varphi)$$

$$= M_C - qr^2(\varphi \operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi - 1) - Hr(1 - \cos\varphi),$$

siendo H la fuerza horizontal (debida al corte) en C. El peso propio por unidad de longitud es q, o sea

$$q = G/2\,r\pi,$$

siendo G el peso del cilindro.

El trabajo elástico del cilindro es, según la fórmula (104),

$$A = 2\frac{1}{2EJ}\int_0^{\pi} M^2 ds,$$

y haciendo

$$\frac{\partial A}{\partial M_C} = 0 \quad ó \quad \int_0^{\pi} M \frac{\partial M}{\partial M_C}\,d\varphi = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial H} = 0,$$

resulta, después de efectuar la integración,

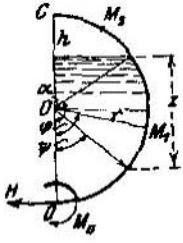
$$M_C = qr^2/2, \quad H = qr/2 \quad \text{ó}$$

$$M_C = \frac{Gr}{4\pi}, \quad H = \frac{G}{4\pi}, \quad M_B = -\frac{Gr}{4\pi}(\pi - 2), \quad M_D = \frac{3Gr}{4\pi}.$$

M es nulo para los valores de φ que satisfacen a la ecuación

$$2 - \cos\varphi - 2\varphi \operatorname{sen}\varphi = 0.$$

510. Cortemos por CD, introduciendo en D la fuerza normal H y el momento M_D. La fuerza que ejerce el líquido de peso específico γ sobre el elemento de área $lrd\psi$ correspondiente a la sección ψ vale



$$\gamma z l r d\psi.$$

En la sección φ el momento flector vale

$$M_1 = M_D + Hr(1 - \cos\varphi) - \gamma l r \int_{\psi=0}^{\varphi} r \operatorname{sen}(\varphi - \psi)\, z\, d\psi,$$

en donde

$$z = r - h + r\cos\psi,$$

y efectuando la integración

$$M_1 = M_D + Hr(1 - \cos\varphi) - \gamma l r^2 [(r - h)(1 - \cos\varphi) + \tfrac{1}{2} r\varphi \operatorname{sen}\varphi],$$

que es válido desde

$$\varphi = 0 \quad \text{hasta} \quad \varphi = \alpha.$$

Del mismo modo el momento flector en la parte mojada es

$$M_2 = M_D + Hr(1 - \cos\varphi) - \gamma l r \int_{\psi=0}^{\alpha} r \operatorname{sen}(\varphi - \psi)\, z\, d\psi$$

$$= M_D + Hr(1 - \cos\varphi) - \gamma l r^2 \{(r - h)[\cos(\varphi - \alpha) - \cos\varphi]$$

$$+ \frac{r}{2}[\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\varphi - \alpha) + \alpha \operatorname{sen}\varphi]\},$$

que es válido desde

$$\varphi = \alpha \text{ hasta } \varphi = \pi.$$

El trabajo de deformación del semidepósito es

$$A = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^{\alpha} M_1^2 ds + \int_{\alpha}^{\pi} M_2^2 ds\right\}.$$

Haciendo

$$\frac{\partial A}{\partial M_D} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial H} = 0$$

o

$$\int_0^{\alpha} M_1 d\varphi + \int_{\alpha}^{\pi} M_2 d\varphi = 0,$$

y

$$\int_0^{\alpha} M_1 (1 - \cos\varphi)\, d\varphi + \int_{\alpha}^{\pi} M_2 (1 - \cos\varphi)\, d\varphi = 0,$$

efectuando las integraciones y teniendo en cuenta que $h = r(1 + \cos\alpha)$, resultan las ecuaciones

$$M_D + Hr = \frac{\gamma l r^3}{2\pi}[\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha - 2\alpha\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha\cos\alpha],$$

$$M_D + \frac{3}{2}Hr = \frac{\gamma l r^3}{2\pi}\left[\frac{\alpha}{4} + 2\,\text{sen}\,\alpha - 2\alpha\cos\alpha - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \pi - \pi\cos\alpha - \frac{\pi-\alpha}{2}\,\text{sen}^2\,\alpha\right],$$

que determinan los valores de M_D y H.

Designando por H_1 y M_C, respectivamente, la fuerza normal y el momento flector en C, las ecuaciones de la Estática dan

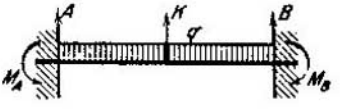
$$H - H_1 = \gamma\int_0^\alpha zl\,ds\,\text{sen}\,\varphi = \frac{\gamma l r^2}{2}(1-\cos\alpha)^2,$$

y tomando momentos respecto a O,

$$M_C + M_D + Hr - H_1 r = 0.$$

Estas dos ecuaciones determinan M_C y H_1.

511. Podemos considerar subdividida la estructura del modo que indica la figura adjunta, introduciendo la fuerza auxiliar desconocida K. Así, resulta, según la tabla 2, números 3 y 4,

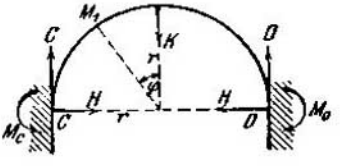


$$A = B = qr - K/2,$$

$$M_A = M_B = qr^2/3 - Kr/4$$

y, además,

$$C = D = K/2.$$



A la distancia x de A el momento flector en la viga horizontal es

$$M = -M_A + Ax - qx^2/2,$$

y en la sección M_1 del arco,

$$M_1 = -M_C + Cr(1 - \text{sen}\,\varphi) - Hr\cos\varphi.$$

El trabajo total de deformación es (prescindiendo del efecto de las fuerzas normales y cortantes), según las fórmulas (100) y (104),

$$\mathsf{A} = \frac{1}{EJ}\int_0^r M^2\,dx + \frac{r}{EJ_1}\int_0^{\pi/2} M_1^2\,d\varphi,$$

en donde J y J_1 son los m. de i. de las secciones de la viga y del arco.

Ahora sólo falta hacer

$$\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial K} = 0, \qquad \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial M_C} = 0, \qquad \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial H} = 0.$$

La primera ecuación es ya explícitamente

$$\frac{1}{J}\int_0^r M\frac{\partial M}{\partial K}dx + \frac{r}{J_1}\int_0^{\pi/2} M_1\frac{\partial M_1}{\partial K}d\varphi = 0,$$

en donde hay que sustituir

$$\frac{\partial M}{\partial K} = -\frac{\partial M_A}{\partial K} + \frac{\partial A}{\partial K}x = \frac{r}{4} - \frac{x}{2},$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial K} = \frac{\partial C}{\partial K}r(1 - \operatorname{sen}\varphi) = \frac{r}{2}(1 - \operatorname{sen}\varphi).$$

Las otras dos ecuaciones (a) dan las relaciones

$$\int_0^{\pi/2} M_1 d\varphi = 0, \qquad \int_0^{\pi/2} M_1 \cos\varphi d\varphi = 0.$$

Efectuando las integraciones, se obtienen las ecuaciones

$$M_O(\pi - 2) + Hr - Kr\left(\frac{3\pi}{4} - 2 + \frac{J_1}{12J}\right) + \frac{J_1}{12J}qr^2 = 0,$$

$$M_O\pi - 2Hr + Kr\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0,$$

$$M_O - \frac{\pi}{4}Hr + \frac{1}{4}Kr = 0,$$

de las cuales salen K, M_O, H y, por lo tanto, se pueden conocer A, C y M_A

512. Según la fórmula (104), el trabajo elástico del arco es

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2E}\int\frac{M^2}{J}ds,$$

y como

$$J = J_0 \sec\alpha, \qquad \cos\alpha ds = dx,$$

se deduce

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2EJ_0}\int M^2 dx.$$

Siendo M_1 y M_2 las expresiones de los momentos flectores en los trozos AP y PB, se tiene

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2EJ_0}\left[\int_0^a M_1^2 dx_1 + \int_0^b M_2^2 dx_2\right],$$

en donde

$$M_1 = Ax_1 - Hy, \qquad M_2 = Bx_2 - Hy,$$

contando las x_1 a partir de A y las x_2 a partir de B. Igualando a cero el valor de $\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial H}$, tendremos

$$\int_0^a (Ax_1 - Hy)y dx_1 + \int_0^b (Bx_2 - Hy)y dx_2 = 0,$$

de donde se deduce para H, después de efectuar las integraciones y teniendo en cuenta la relación $a + b = 2l$, el valor

$$H = \frac{5}{64}\frac{Pab(a^2 + 3ab + b^2)}{hl_3}.$$

En las integraciones hay que hacer uso de la relación

$$(h - y) : h = (l - x)^2 : l^2$$

o

$$y = h(2lx - x^2)/l^2;$$

además,

$$A = Pb/l, \qquad B = Pa/l.$$

513. Solución análoga a la del problema anterior. Se tiene

$$A = B = P;$$

además los momentos flectores son

$$M_1 = Px_1 - Hy \text{ en el trozo } AP,$$

$M_2 = Pb - Hy$ en el trozo comprendido entre las dos cargas dadas. El trabajo elástico total del arco y el tirante es

$$\mathsf{A} = 2\frac{1}{2EJ_0}\left[\int_0^b M_1^2 dx_1 + \int_b^b M_2^2 dx_1\right] + \frac{H^2 2l}{2EF}.$$

Haciendo $\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial H} = 0$, resulta

$$\int_0^b (Px_1 - Hy)\, y\, dx_1 + \int_b^l (Pb - Hy)\, y\, dx_1 = \frac{HlJ_0}{F},$$

en donde

$$\frac{\partial M_1}{\partial H} = -y, \qquad \frac{\partial M_2}{\partial H} = -y.$$

Utilizando, como en el problema anterior, la relación

$$y = h(2lx - x^2)/l^2,$$

se obtiene, después de efectuar las integraciones,

$$H = \frac{Pbh}{12l}\frac{8l^2 - 4lb^2 + b^3}{J_0/F + 8h^2/15}.$$

514. Haciendo $a = b = l$, se tiene en la solución del problema 512

$$\mathsf{A} = \frac{2}{2EJ_0}\int_0^l M^2 dx,$$

en donde $M = Ax - Hy$, $y = h(2lx - x^2)/l^2$, como allí.

Con

$$A = P/2, \qquad H = 25Pl/64h$$

(según el problema 512) se tiene

$$\mathsf{A} = \frac{1}{512}\frac{P^2l^3}{EJ_0},$$

y según la fórmula (103),

$$f = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{1}{256}\frac{Pl^3}{EJ_0}.$$

515. Las reacciones verticales de los apoyos son:

$$A = B = ql,$$

y el momento flector en M

$$M = -M_A + Ax - Hy - qx^2/2.$$

Según la fórmula (104), el trabajo elástico por efecto de la flexión es

$$A = \frac{1}{2EJ}\int M^2 ds,$$

extendiéndose la integral a todo el arco ACB. El arco es hiperestático con dos grados de indeterminación. Haciendo

$$\frac{\partial A}{\partial H} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial M_A} = 0,$$

se tiene

$$\int M\frac{\partial M}{\partial H}ds = -\int Myds = 0, \tag{a}$$

$$\int M\frac{\partial M}{\partial M_A}ds = -\int Mds = 0. \tag{b}$$

Trasladando los ejes coordenados de A a C y llamando ξ y η a las nuevas coordenadas del punto M, se tiene

$$x = l - \xi, \qquad y = h - \eta.$$

La ecuación de la parábola es

$$\xi^2 = l^2\eta/h;$$

además,

$$M = M_0 + H\eta - q\xi^2/2, \tag{c}$$

en donde $M_0 = -M_A - Hh + ql^2/2$.
Las ecuaciones (a) y (b) toman ahora la forma

$$\int Mds = 0, \qquad \int M\eta ds = 0, \tag{d}$$

o

$$M_0\int ds + \left(H - \frac{ql^2}{2h}\right)\int \eta ds = 0, \tag{e}$$

$$M_0\int \eta ds + \left(H - \frac{ql^2}{2h}\right)\int \eta^2 ds = 0. \tag{f}$$

Las tres integrales que entran en las ecuaciones (e) y (f) son distintas de cero, y como el determinante es también distinto de cero, las ecuaciones serán compatibles únicamente si

$$M_0 = 0 \qquad y \qquad H - ql^2/2h = 0,$$

de donde se deducen los valores que se buscan

$$H = ql^2/2h \qquad y \qquad M_A = M_B = 0.$$

516. Las ecuaciones (d) del problema anterior, teniendo en cuenta la (c), son:

$$M_0 \int ds + H \int \eta\, ds = \frac{1}{2} q \int \xi^2 ds,$$

$$M_0 \int \eta\, ds + H \int \eta^2 ds = \frac{1}{2} q \int \xi^2 \eta\, ds.$$

Como se conoce la ecuación de la directriz del arco $F(\xi, \eta) = 0$, pueden calcularse esas cinco integrales y deducir de ellas M_0 y H, y, por lo tanto, también M_x, resultando el cálculo del arco tan fácil como el de una viga sencilla.

---

517. Sea O el centro de giro, y F la sección de la varilla; la fuerza de inercia en la sección x vale

$$\frac{F\gamma}{g} \int_x^l \omega^2 \xi\, d\xi = \frac{\gamma F \omega^2}{2g} (l^2 - x^2).$$

Este valor es máximo para $x = 0$, y vale entonces $F\gamma\omega^2 l/2g$; igualándolo a $F\sigma_0$ se halla el número de vueltas buscado

$$n = \frac{30}{\pi}\omega = \frac{30}{\pi l}\sqrt{\frac{2g\sigma_0}{\gamma}}.$$

La dilatación de la barra en la sección x es

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\text{fuerza centrífuga}}{EF},$$

de donde

$$\Delta dx = \frac{\gamma\omega^2}{2gE}(l^2 - x^2)\, dx,$$

e integrando

$$\Delta x = \frac{\gamma\omega^2}{2gE}\left(l^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Para $x = l$ resulta el alargamiento buscado

$$\Delta l = 2l\sigma_0/3E.$$

518. La sección F debe disminuir al aumentar x. Al incremento dx de x corresponderá la variación de sección $-dF$, y por lo tanto la fuerza elemental (tensión × superficie) $-\sigma_0\, dF$; igualándola a la fuerza centrífuga del elemento de barra $F dx$ tendremos

$$-\sigma_0 dF = \frac{\gamma}{g} F dx\, x\, \omega^2,$$

en donde γ es el peso específico. De ahí resulta, poniendo $\gamma\omega^2/2\sigma_0 g = c$,

$$\frac{dF}{F} = -\frac{\gamma\omega^2}{\sigma_0 g} x dx = -c\, 2x dx,$$

e integrando resulta para forma de la barra

$$F = F_0\, e^{c(l^2 - x^2)}.$$

La sección extrema F_0 resulta de la condición

$$F_0\sigma_0 = G r \omega^2/g$$

(G = fuerza centrífuga para $x = l$).

519. Podemos cortar en C introduciendo la fuerza axial H (del mismo valor que en D) y el momento flector M_C. Desde luego ha de verificarse la ecuación de la Estática

$$H = \int_{\psi=0}^{\psi=\pi/2} \omega^2 \varrho \, dm ,$$

en donde

$$dm = \frac{G}{2r\pi g} r d\psi = \frac{G}{2\pi g} d\psi, \qquad \varrho = r \operatorname{sen} \psi .$$

Así se tiene

$$H = \frac{G r \omega^2}{2\pi g} .$$

El momento flector en el punto M es

$$M = M_C - H r (1 - \cos \varphi) + \frac{G r^2 \omega^2}{2\pi g} \int_{\psi=0}^{\psi=\varphi} \operatorname{sen} \psi (\cos \psi - \varphi) \, d\psi$$

$$= M_C - H r (1 - \cos \varphi) + \frac{G r^2 \omega^2}{2\pi g} \left(1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi\right)$$

$$= M_C - \frac{G r^2 \omega^2}{4\pi g} \operatorname{sen}^2 \varphi .$$

El trabajo elástico del semianillo es, según la fórmula (104),

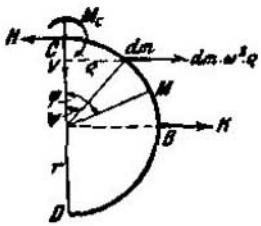
$$A = \frac{1}{2EJ} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} M^2 ds .$$

Haciendo $\frac{\partial A}{\partial M_C} = 0$, se tiene

$$\int_0^\pi M \frac{\partial M}{\partial M_C} d\varphi = \int_0^\pi M \, d\varphi = 0 ,$$

y de aquí

$$M_C = \frac{G r^2 \omega^2}{8\pi g} .$$



Los momentos flectores en B y D son

$$M_B = -M_C, \quad M_D = M_C .$$

La fuerza longitudinal en B es nula.

Para hallar las variaciones de longitud de los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, introduciremos en C la fuerza auxiliar vertical V, que luego anularemos. El momento flector en M vale

$$M = M_C - \frac{G r^2 \omega^2}{4\pi g} \operatorname{sen}^2 \varphi - V r \operatorname{sen} \varphi .$$

Hallando ahora

$$\frac{\partial A}{\partial V} = \frac{1}{EJ}\int_0^{\pi} M \frac{\partial M}{\partial V}\, ds = -\frac{r^2}{EJ}\int_0^{\pi} M \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\,,$$

y poniendo en M de nuevo $V = 0$, se halla

$$v = \frac{\partial A}{\partial V} = \frac{G r^4 \omega^2}{12\pi g E J}$$

para el descenso de C, o sea el acortamiento del diámetro $\overline{CD}$.

Introduciendo, del mismo modo, la fuerza auxiliar horizontal K, se tiene para el momento flector en M

$$M = M_c - \frac{G r^2 \omega^2}{4\pi g}\operatorname{sen}^2\varphi - \frac{K}{2} r (1 - \cos\varphi),$$

duesto que la fuerza auxiliar K actuando en B produce en C una reacción $K/2$. El trabajo elástico es

$$A = 2\,\frac{1}{2EJ}\int_0^{\pi/2} M^2 ds\,.$$

Hallando $\frac{\partial A}{\partial K}$ y haciendo después $K = 0$, se obtiene para el desplazamiento de B en la dirección de K

$$u = \frac{\partial A}{\partial K} = \frac{G r^4 \omega^2}{24\pi g E J}\,.$$

El alargamiento del diámetro $\overline{AB}$ es el doble, o sea

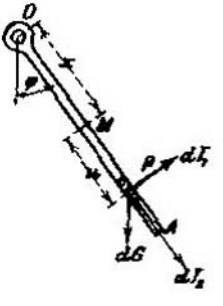
$$\frac{G r^4 \omega^2}{12\pi g E J}\,.$$

520. Consideremos un elemento de barra en P a la distancia u de N y de longitud du; su masa es

$$dm = G\,du/gl,$$

y su peso,

$$dG = G\,du/l.$$



Según el principio de d Alembert, hay que considerar las fuerzas de inercia de este elemento, que valen

$$dT_1 = (x + u)\,\lambda\, dm \text{ normal a la barra,}$$

y

$$dT_2 = (x + u)\,\omega^2 dm \text{ paralela a la barra.}$$

siendo

$$\omega = -\frac{d\varphi}{dt} \text{ la velocidad angular,}$$

y

$$\lambda = -\frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ la aceleración angular de la barra.}$$

Los momentos de estas tres fuerzas dG, dT_1, dT_2, respecto al punto M para todos los elementos desde M hasta A, dan el momento flector en N

$$M = \int_{u=0}^{l-x} u \operatorname{sen} \varphi dG - \int_{u=0}^{l-x} u dT_1$$

$$= \frac{G}{2l} \operatorname{sen} \varphi (l-x)^2 - \frac{G\lambda}{6gl}(l-x)(2l^2 - lx - x^2).$$

Para determinar λ basta observar que el momento flector en la articulación O debe ser nulo; luego para $x = 0$

$$\lambda = \frac{3g}{2l} \operatorname{sen} \varphi,$$

y, por lo tanto,

$$M = -\frac{G \operatorname{sen} \varphi}{4l^2} x (l-x)^2.$$

M es máximo en el punto $x = l/3$, donde toma el valor

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{27} G l \operatorname{sen} \varphi.$$

521. El esfuerzo cortante en la sección N es

$$Q = \int_{u=0}^{l-x} \operatorname{sen} \varphi dG - \int_{u=0}^{l-x} dT_1 = \frac{G}{l} \operatorname{sen} \varphi (l-x) - \frac{G\lambda}{2gl}(l^2 - x^2),$$

y sustituyendo el valor dado de λ, resulta

$$Q = \frac{G \operatorname{sen} \varphi}{4l^2}(l-x)(l-3x).$$

El máximo analítico del esfuerzo cortante corresponde a $x = 2l/3$, y vale

$$Q_{\text{máx}} = -\frac{G \operatorname{sen} \varphi}{12}.$$

El mayor valor es, pues,

$$Q = \frac{G \operatorname{sen} \varphi}{4}$$

y corresponde a O.

522. El esfuerzo normal en el punto N es

$$S = \int_{u=0}^{l-x} \cos \varphi dG + \int_{u=0}^{l-x} dT_2 = G\frac{l-x}{l} \cos \varphi + \frac{G\omega^2}{2gl}(l^2 - x^2).$$

De la ecuación del movimiento de la barra

$$\omega d\omega = \lambda(-d\varphi), \qquad \lambda = \frac{3g}{2l} \operatorname{sen} \varphi,$$

se deduce, teniendo en cuenta el estado inicial $\omega = 0$, $\varphi = \alpha$, la ecuación

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

y

$$S = \frac{G}{2l^2}(l - x)\,[2l\cos\varphi + 3(l + x)(\cos\varphi - \cos\alpha)].$$

523. Sea P la sección para la cual se busca el momento flector, y N un elemento de la varilla entre P y el extremo B; su masa será

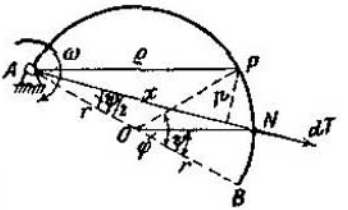
$$dm = \mu r d\psi,$$

y su fuerza de inercia,

$$dT = x\omega^2 dm;$$

además se tiene

$$x = 2r\cos(\psi/2).$$



El momento flector en P está producido por las fuerzas de inercia dT y valdrá $M = \int p\,dT$, y siendo

$$p = \rho\,\mathrm{sen}\,(PAN) = 2r\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi - \psi}{2},$$

se deduce

$$M = 4\mu r^3\omega^2\cos\frac{\varphi}{2}\int_{\psi=0}^{\psi}\cos\frac{\psi}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi - \psi}{2}\,d\psi = \mu r^3\omega^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

El valor máximo de este momento flector corresponde a la sección en que $\frac{dM}{d\varphi} = 0$, o sea para

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\varphi.$$

524. Por la detención súbita de la barra, toda su energía cinética T se transforma en trabajo elástico. Haciendo la hipótesis de que los apoyos no absorben nada (cosa que no ocurrirá, pues algo cederán), nos pondremos en las condiciones más desfavorables, puesto que toda la energía se empleará en deformar la barra.

En el problema **456**, y para un caso parecido con una carga estática P, se halló que el valor del trabajo elástico era

$$A = \frac{P^2 l(l - l_1)^3}{6EJ}.$$

Igualando esta expresión a la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}\frac{G}{g}l^2\omega^2,$$

se hallará la fuerza estática P, que produciría el mismo efecto que la detención súbita. De aquí se deduce el momento flector máximo, que actúa en B

$$M_{\text{máx}} = P(l - l_1) = \omega\sqrt{\frac{3EJGl}{g}}.$$

525. La solución como en el problema anterior, siendo en este caso G el peso del volante, l su diámetro y l_1 la distancia de B al eje del volante; de aquí resulta

$$\omega = n\pi/30.$$

526. Solución análoga a la del problema **524.** El elemento de masa dm de la barra a la distancia x de A tiene una cantidad de movimiento $x\omega dm$; la carga de la barra al pararse repentinamente es, pues, proporcional a la distancia x, como en el problema **457.**

Sustituyendo en aquel resultado $l_1 = 2l/3$, se obtiene para la expresión del trabajo de deformación

$$A = \frac{41}{204\,120}\frac{a^2l^7}{EJ}.$$

Igualándolo a la energía cinética de la barra

$$T = \frac{Gl^3\omega^2}{6g},$$

resulta

$$a^2 = \frac{34\,020}{41}\frac{GEJ\omega^2}{gl^5},$$

y $q = ax$ es la carga total estática triangular que producirá el mismo trabajo elástico que la parada repentina.

El máximo momento flector, lo mismo que en el problema **171**, tiene lugar en B y vale, como se indicó,

$$M_{máx} = a(2l^3 + l_1^3 - 3l^2 l_1)/6 = 4al^3/81 = 0'4542\omega\sqrt{GEJl}.$$

527. El trozo x de vástago tiene una masa igual a Gx/gl. La fuerza de inercia G_1b/g del émbolo, dirigida hacia la izquierda, y la $\frac{Gx}{gl}b$ del trozo x dan junto con K un esfuerzo normal

$$S = -K + \left(G_1 + \frac{G}{l}x\right)\frac{b}{g}.$$

Para $x = 0$, o sea en la unión de émbolo y vástago, la carga es máxima. Sin embargo, cuando la aceleración b es muy grande, el otro extremo del vástago, correspondiente a $x = l$, es el más cargado.

528. La barra $\overline{AB}$ efectúa un movimiento de traslación curvilíneo, y, por lo tanto, cualquier punto M tiene la misma aceleración que el A, o sea $b = r\omega^2$, con una inclinación $\pi - \varphi$ respecto a $\overline{AB}$. La fuerza de inercia del elemento de masa en M es, pues,

$$dT = r\omega^2 dm \qquad \text{y} \qquad dm = \frac{G}{gl}d\xi.$$

Para hallar la reacción en A (en dirección de la manivela) se halla su momento y el de todas las dT respecto a B, y se tiene

$$-Al\,\text{sen}\,\varphi + \int_0^l (l-\xi)\,\text{sen}\,\varphi\, dT = 0,$$

de donde

$$A = Gr\omega^2 l/2g.$$

El momento flector en N vale, pues,

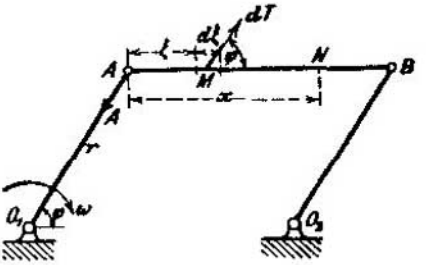
$$M = -Ax \operatorname{sen} \varphi + \int_{\xi=0}^{x} (x-\xi) \operatorname{sen} \varphi \, dT = -\frac{Gr\omega^2}{2gl} x(l-x) \operatorname{sen} \varphi,$$

cuyo valor máximo tiene lugar en el punto medio de la barra, siendo, en cambio, nulo en sus extremos.

El esfuerzo normal en N es

$$S = A \cos \varphi - \int_{\xi=0}^{x} \cos \varphi \, dT$$

$$= \frac{Gr\omega^2}{2g} \cos \varphi \left(1 - \frac{2x}{l}\right),$$



y el esfuerzo cortante,

$$Q = A \operatorname{sen} \varphi - \int_{\xi=0}^{x} \operatorname{sen} \varphi \, dT = \frac{Gr\omega^2}{2g} \operatorname{sen} \varphi \left(1 - \frac{2x}{l}\right).$$

Ambos son nulos en la mitad de la barra y máximos en los extremos.

529. El elemento de masa de la barra

$$dm = \frac{G}{gl} d\xi$$

tiene una fuerza de inercia

$$dT = \varrho \omega^2 dm.$$

Para hallar la reacción en A (dirección hacia O) se toman momentos de todas las fuerzas de inercia respecto a B, y se tiene

$$Al \operatorname{sen} \alpha = \int_0^l (l-\xi) \operatorname{sen} (\alpha + \varphi) \, dT.$$

Como $\varrho \operatorname{sen} (\alpha + \varphi) = h$ (altura del triángulo), se deduce

$$A = \frac{G\omega^2 a}{2g}.$$

El momento flector en N, llamando a $\overline{AN} = x$, es

$$M = -Ax \operatorname{sen} \alpha + \int_{\xi=0}^{x} (x-\xi) \operatorname{sen} (\alpha + \varphi) \, dT,$$

o sea

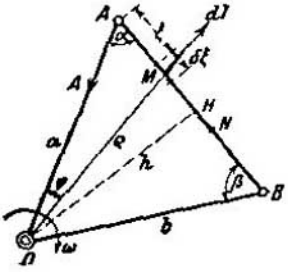
$$M = -\frac{G\omega^2 h}{2gl} x(l-x).$$

Este valor es máximo en el punto medio de la barra, y vale

$$M_{máx} = -\frac{G\omega^2 hl}{8g}.$$

El esfuerzo normal en N es

$$S = -A \cos \alpha + \int_{\xi=0}^{\xi=x} \cos(\alpha + \varphi)\, dT .$$



Como $\varrho \cos(\alpha + \varphi) = a \cos \alpha - \xi$, se deduce

$$S = -\frac{G\omega^2}{2gl}\left[a \cos \alpha\,(l - 2x) + x^2\right].$$

S es mínimo para $x = a \cos \alpha$, esto es, para el pie H de la altura, donde vale

$$S_{\text{mín}} = -\frac{G\omega^2}{2g}\frac{ab}{l}\cos \alpha \cos \beta .$$

El esfuerzo cortante de Q en N es

$$Q = A \operatorname{sen} \alpha - \int_{\xi=0}^{\xi=x} \operatorname{sen}(\alpha + \varphi)\, dT ,$$

y siendo $\varrho \operatorname{sen}(\alpha + \varphi) = h$,

$$Q = \frac{G\omega^2 h}{2gl}(l - 2x).$$

Q se anula para el punto medio de la barra.

580. Llamemos φ a la inclinación variable de la campana respecto a la vertical, y J a su m. de i. respecto a la perpendicular al plano del papel que pasa por O; la aceleración angular en O valdrá

$$\lambda = \frac{Gr \operatorname{sen} \varphi}{J}, \qquad \overline{OS} = r,$$

y utilizando la ecuación

$$\omega\, d\omega = \lambda\,(-d\varphi),$$

la velocidad angular es

$$\omega^2 = \frac{2Gr}{J}(\cos \varphi - \cos \alpha).$$

Las reacciones en el punto O son X (horizontal hacia la derecha) e Y (vertical hacia arriba):

$$X = \frac{Gr}{g}(\omega^2 \operatorname{sen} \varphi + \lambda \cos \varphi),$$

$$Y = G + \frac{Gr}{g}(\omega^2 \cos \varphi - \lambda \operatorname{sen} \varphi);$$

estas ecuaciones se obtienen considerando las fuerzas de inercia de la masa G/g en S, con lo cual se deduce

$$X = G\frac{r^2}{\varrho^2 + r^2} \operatorname{sen} \varphi\,(3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha),$$

$$Y = G\frac{r^2}{\varrho^2 + r^2}(2 \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \cos \alpha - \operatorname{sen}^2 \varphi) + G .$$

siendo ϱ el radio de giro de la campana respecto a la perpendicular al papel que pasa por el c. d. g.

La reacción X produce en los apoyos A y B (problema 415) reacciones iguales (fuerzas longitudinales)

$$A = B = X/2,$$

siendo alternativamente A una fuerza de tracción, y B una de compresión, y viceversa.

El momento flector en O debido a Y es

$$M = Yl/4, \qquad \text{siendo} \qquad \overline{AB} = l.$$

La tensión unitaria máxima en la sección O es, prescindiendo del esfuerzo cortante,

$$\sigma = \frac{1}{4}\frac{Yl}{W} + \frac{X}{2F},$$

siendo W el momento resistente, y F el área de la sección.

Haciendo $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$, se obtiene la posición φ de la campana, que produce la máxima tensión en la viga por la ecuación

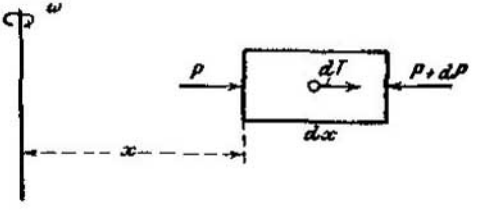
$$\frac{a\cos 2\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi}{a\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi} = \frac{2}{3}\cos\alpha,$$

siendo $a = 2W/Fl$.

531. Se consideran las fuerzas en un trozo dx del resorte, cuya longitud varía en $d\xi$, siendo f la variación de longitud para l.

Se tiene $P = P_0 - k\frac{d\xi}{dx}$, siendo $\frac{d\xi}{dx}$ la dilatación, o sea la variación de longitud por unidad. La dilatación de todo el resorte es f/l, la deformación de un resorte cilíndrico por efecto de la fuerza P vale $f = \frac{64nr^3}{Gd^4}P$, siendo n el número de espiras; luego la constante k valdrá

$$k = \frac{Gd^4 l}{64nr^3}.$$



Si m es la masa total del resorte, $dm = m\,dx/l$ la del elemento en P y ξ la variación de x por efecto de la fuerza centrífuga, ésta valdrá

$$dT = (x + \xi)\,\omega^2\,dm,$$

y de $-dP + dT = 0$ se deduce

$$k\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\frac{m}{l}(x + \xi)\,\omega^2,$$

o

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\lambda^2(x + \xi) \quad \text{siendo} \quad \lambda^2 = \frac{m\omega^2}{kl}.$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$\xi = C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x - x,$$

lo cual puede comprobarse diferenciándola dos veces.

Las constantes C_1 y C_2 se determinan por la condición de que para $x = a$ y $x = b$ el desplazamiento $\xi = 0$, lo cual da

$$C_1 = \frac{a \operatorname{sen} \lambda b - b \operatorname{sen} \lambda a}{\operatorname{sen} \lambda l}, \quad C_2 = \frac{b \cos \lambda a - a \cos \lambda b}{\operatorname{sen} \lambda l}.$$

Hallando $\frac{d\xi}{dx} = -C_1\lambda \operatorname{sen} \lambda x + C_2\lambda \cos \lambda x - 1$, y sustituyendo las constantes se halla para la fuerza elástica del resorte en x

$$P = P_0 - k\frac{d\xi}{dx} = P_0 - \frac{k\lambda}{\operatorname{sen} \lambda l}[b \cos \lambda (x - a) - a \cos \lambda (b - x)] + k,$$

y para $x = a$ y $x = b$ la fuerza elástica en A y B

$$P_A = P_0 - \frac{Gd^4}{64nr^3}\left[b\left(\frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} - 1\right) + a\left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi}\right)\right],$$

$$P_B = P_0 + \frac{Gd^4}{64nr^3}\left[b\left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi}\right) + a\left(\frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} - 1\right)\right],$$

donde hay que sustituir

$$\varphi = \lambda l = \frac{8r\omega}{d^2}\sqrt{\frac{mnr}{G}}.$$

582. Del problema anterior se deduce para $P_0 = 0$

$$P = -k\frac{d\xi}{dx} = -k(-C_1\lambda \operatorname{sen} \lambda x + C_2\lambda \cos \lambda x - 1)$$

y

$$\xi = C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x - x.$$

Para determinar las constantes se tiene en cuenta que para $x = a$, $P = 0$ y para $x = b$, $\xi = 0$, de donde

$$C_1 = \frac{b \cos \lambda a - (1/\lambda) \operatorname{sen} \lambda b}{\cos \lambda l}, \qquad C_2 = \frac{b \operatorname{sen} \lambda a + (1/\lambda) \cos \lambda b}{\cos \lambda l}.$$

De aquí se deduce el desplazamiento del punto A

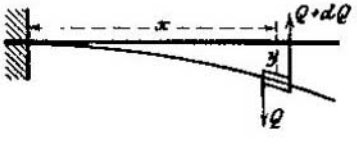
$$\xi_A = \frac{b}{\cos \lambda l} - \frac{\operatorname{tg} \lambda l}{\lambda} - a$$

y la fuerza elástica en B

$$P_B = \frac{Gd^4}{64nr^3}\left[b\varphi \operatorname{tg} \varphi - l\left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1\right)\right], \text{ siendo } \varphi = \lambda l.$$

---

588. Sea ϱ la densidad de la varilla, $dm = \varrho F dx$ será la masa de un elemento en cuyas secciones extremas actúan los esfuerzos tangenciales Q y $Q + dQ$; para la aceleración del movimiento queda dQ, y se tiene



$$dm\frac{\partial^2 y}{dx^2} = dQ.$$

Siendo M el momento flector, se tiene

$$Q = \frac{dM}{dx}, \text{ y según la ec. (41), se deduce } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M}{EJ},$$

de donde resulta la siguiente ecuación de vibraciones

$$\varrho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \tag{a}$$

Su solución general tiene la forma

$$y = [a \cos \lambda x + b \operatorname{sen} \lambda x + A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}] \operatorname{sen} \omega t, \tag{b}$$

como puede comprobarse diferenciando dos veces respecto a t y cuatro veces respecto a x. El valor de λ se deduce de

$$\lambda^4 = \frac{\varrho F \omega^2}{EJ}.$$

Para determinar las cuatro constantes de integración a, b, A, B se tendrá en cuenta que a $x = 0$ corresponden los valores $y = 0$ y $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, y que en el extremo de la viga, o sea para $x = l$, tanto el momento flector M como el esfuerzo cortante Q son cero; por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \text{ para } x = l.$$

Así se obtienen las relaciones

$$a + A + B = 0 \quad \text{y} \quad b + A - B = 0 \tag{c}$$

y

$$\left.\begin{aligned} -a \cos \lambda l - b \operatorname{sen} \lambda l + A e^{\lambda l} + B e^{-\lambda l} &= 0, \\ a \operatorname{sen} \lambda l - b \cos \lambda l + A e^{\lambda l} - B e^{-\lambda l} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

Eliminando entre las cuatro ec. (a) y (d) las constantes a, b, A, B, resulta

$$\cos \lambda l \cos \lambda l + 1 = 0.$$

El valor menor que satisface a esta ecuación (vibración fundamental) es

$$\lambda l = 1{,}87, \quad \text{o sea} \quad \lambda = 1{,}87/l.$$

De la relación antes dada entre λ y ω se deduce para la oscilación fundamental

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{EJ}{\varrho F}} = \frac{3{,}50}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\varrho F}}.$$

Llamando T a la duración de una oscilación completa, se tiene

$$\omega T = 2\pi,$$

y el número de oscilaciones por segundo será

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0{,}556}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\varrho F}}.$$

534. El descenso del extremo de la viga debido a la fuerza P vale

$$y = \frac{Pl^3}{3EJ},$$

y, por lo tanto, la fuerza elástica será

$$P = \frac{3EJ}{l^3} y.$$

En consecuencia, la ecuación del movimiento para la masa M es

$$M \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{3EJ}{l^3} y.$$

Sus soluciones dan vibraciones armónicas de período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Ml^3}{3EJ}},$$

de donde se deduce E.

535. Solución como antes. La ecuación del movimiento es

$$M \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{48EJ}{l^3} y,$$

de donde

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Ml^3}{48EJ}},$$

y de ahí sale EJ.

536. Sea T *la energía cinética* y U *la energía potencial* (trabajo elástico), y $z = z(x, t)$ la desviación del punto x en el instante t medida a partir del eje de la varilla en reposo: tendremos

$$\mathsf{T} = \frac{1}{2} \int \varrho \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx$$

y

$$\mathsf{U} = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EJ} dx = \frac{1}{2} \int EJ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 dx,$$

verificándose la igualdad

$$\mathsf{T} + \mathsf{U} = h.$$

Supongamos que en el instante inicial partimos del reposo, o sea que para $t = 0$ se tiene $\mathsf{T} = \mathsf{T}_0$, $\mathsf{U} = 0$, y, por lo tanto, $\mathsf{T}_0 = h$; en el instante $t = T/4$ (siendo T el período), que es *cuando tiene lugar la primera inversión* del movimiento, tendremos $\mathsf{T} = 0$, $\mathsf{U} = \mathsf{U}_1 = h$, es decir, $\mathsf{T}_0 = \mathsf{U}_1$.

Para obtener las oscilaciones, plantearemos la ecuación

$$z(x, t) = y(x) \operatorname{sen} \omega t,$$

de donde se deduce

$$\frac{\partial z}{\partial t} = y\omega \cos \omega t,$$

y para $t = 0$,

$$\mathsf{T}_0 = \frac{1}{2} \omega^2 \int \varrho y^2 dx.$$

Del mismo modo, como el período viene dado por $\omega T = 2\pi$, para $= T/4 = \pi/2\omega$, tendremos

$$U_1 = \frac{1}{2}\int E J y''^2\, dx.$$

De la condición $T_0 = U_1$ se deduce inmediatamente el valor dado para ω^2.

La generalización de la expresión para una masa suplementaria m no necesita más explicaciones.

537. Como solución aproximada tomamos la siguiente, que es válida para toda la longitud de la viga (salvo un factor constante, que podemos suprimir, puesto que y entra en el numerador y denominador de ω^2 con la misma potencia)

$$y = l^3 x - 2lx^3 + x^4,$$

que cumple las siguientes condiciones límites (¡secciones extremas libres!)

$$y(0) = 0, \qquad y''(0) = 0, \qquad y(l) = 0, \qquad y''(l) = 0.$$

Sustituyendo y e y'' en la ecuación (b) del problema **536** y haciendo $x_m = l/2$, o sea $y(l/2) = 5\, l^4/16$, resulta

$$\omega^2 = \frac{E J \int_0^l 12^2 x^2 (l - x)^2\, dx}{\frac{M}{l}\int_0^l (l^3 x - 2lx^3 + x^4)^2\, dx + \frac{25\, m l^4}{256}} = \frac{24 E J}{\left(\frac{125}{256} m + \frac{31}{126} M\right) l^3}.$$

La frecuencia buscada, puesto que $\omega T = 2\pi$, será

$$n = 1/T = \omega/2\pi\,.$$

538. En este caso tomaremos por aproximación

$$y = 3\, l\, x^2 - x^3\,,$$

que satisface a las condiciones límites

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y''(l) = 0\,.$$

La ecuación (b) del problema **536** da como antes

$$\omega^2 = \frac{3 E J}{(m + 33 M/140)\, l^3}, \qquad n = \frac{\omega}{2\pi}.$$

539. La solución aproximada que aceptamos es

$$y = 3lx^2 - 4x^3\,,$$

que satisface a las condiciones límites

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y'(l/2) = 0\,.$$

La ecuación (b) del problema **536** da inmediatamente

$$\omega^2 = \frac{192 E J}{(m + 13 M/35)\, l^3}, \quad \text{y se tiene} \quad n = \frac{\omega}{2\pi}.$$

540. Utilizando el resultado del problema **537** se deduce fácilmente de

$$n_1 = \frac{n}{p} = \frac{\omega}{2\pi p}$$

el m. de i. buscado

$$J = \frac{\pi^2 p^2 n_1^2 l^3}{12E}\left(m + \frac{17}{35}M\right).$$

541. Consideraremos en primer lugar la viga deformada bajo la acción de su carga estática, y después supondremos que anulamos esa deformación *elevando el plano de sustentación hasta el nivel de los apoyos.* En esta posición, la viga tiene una cierta energía potencial (sea U_0), y su energía cinética es $T = 0$. Al alejar el plano, la viga efectúa oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio (en ella tenemos $T = U_0$ y $U = 0$), y como son armónicas, el desplazamiento hasta el próximo reposo ($T = 0$) es el doble que con carga estática.

El período es el mismo que en el problema 587 (para $m = 0$, $M = G/g$)

$$T = \frac{1}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{31}{24\cdot 126}\frac{Ml^3}{EJ}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{97{,}55}\frac{Ml^3}{EJ}}.$$

(El valor del factor numerico bajo la raíz, según la teoría exacta, sería $1/\pi^4 = 1/97{,}41$.)

542. Según la fórmula (55), el ángulo de torsión del alambre por unidad de longitud (siendo G el módulo de elasticidad transversal) vale

$$\vartheta = \frac{2}{\pi}\frac{M_t}{Gr^4}.$$

Si llamamos φ al ángulo total de giro para la longitud l, tendremos $\varphi = l\vartheta$, y el momento de torsión correspondiente será

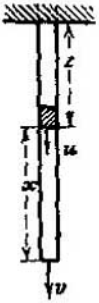
$$M_t = \frac{\pi}{2}\frac{Gr^4}{l}\varphi.$$

La ecuación del movimiento de la barra es, pues,

$$\lambda \equiv \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{M_t}{J} = -\frac{\pi}{2}\frac{Gr^4}{Jl}\varphi,$$

y ésta es la ecuación diferencial para una vibración simple armónica de período

$$T = \frac{2}{r^2}\sqrt{\frac{2\pi Jl}{G}}.$$



543. Sea u la velocidad del cable a la distancia z de la sección superior; podemos suponer que

$$u : v = \Delta z : \Delta l,$$

y como las variaciones de longitud Δz y Δl satisfacen a la condición

$$z : \Delta l = z : \Delta l,$$

podemos poner $u = vz/l$.

En el elemento dz del cable, de sección F, actúan las siguientes fuerzas: el peso propio $\gamma F dz$, las tensiones (tracciones) totales σF hacia abajo y $(\sigma - d\sigma)F$ hacia arriba, y la fuerza de inercia

$\frac{\gamma F dz}{g} \frac{du}{dt}$ hacia arriba. La suma de todas estas fuerzas igualada a cero da la ecuación

$$d\sigma = \frac{\gamma}{g} dz \frac{du}{dt} - \gamma dz,$$

y como $\frac{dz}{dt} = u$ se tiene

$$d\sigma = \frac{\gamma}{g} [u du - g dz],$$

integrando se deduce

$$\sigma = \sigma_1 + \frac{\gamma}{g} \left[\frac{u^2}{2} - gz\right],$$

siendo σ_1 la tensión para $z = 0$, $u = 0$, es decir, para la sección superior del cable.

Para $z = l$, $\sigma = 0$, resulta

$$\sigma_1 = \gamma \left(l - \frac{v^2}{2g}\right),$$

y para una sección cualquiera $x = l - z$

$$\sigma = \gamma x \left[1 - \frac{v^2}{2gl^2} (2l - x)\right].$$

544. Consideremos un trozo de anillo de longitud Δs, y sea S la fuerza longitudinal o axial sobre el mismo producida por la dilatación; la ecuación del movimiento radial es

$$\varrho F \Delta s \frac{d^2w}{dt^2} = -\frac{S}{r} \Delta s.$$

Según la ley de Hooke, si w es el alargamiento del radio,

$$S = EFw/r,$$

y, por lo tanto, la ecuación del movimiento es

$$\varrho \frac{d^2w}{dt^2} + \frac{E}{r^2} w = 0.$$

Obtendremos, pues, vibraciones armónicas de periodo

$$T = 2\pi r \sqrt{\varrho/E},$$

o sea una frecuencia circular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad \text{y} \quad n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

---

545. Como $v_0 = 0$, tendremos también $T_0 = 0$; por lo tanto, $n = 2$, es decir que la carga súbita Q produce la misma deformación que la carga estática $2Q$. Véase la ecuación (112).

546. Sea f la flecha correspondiente a la carga estática P; al desaparecer subitamente P queda la f con sentido contrario; a ella se añade $2f$ por efecto de la acción súbita de P con el signo cambiado (véase el problema anterior); por lo tanto, la deformación total es $f + 2f = 3f$.

547. Según el problema 545, el factor dinámico n correspondiente a carga súbita sin choque es igual a 2. La flecha f en A es, pues, la misma que con carga estática $2P$ en el extremo de la viga. Tendremos, pues,

$$f = \frac{2Pl^3}{3EJ}.$$

548. Al romperse el hilo, queda el esfuerzo de tracción actuando en uno de los lados. Como es una fuerza súbita sin choque, el factor dinámico (problema 545) es $n = 2$; la fuerza que actúa es, pues, $2S$.

549. Como se supone que la caída de la nieve es instantánea, produce el mismo efecto que una carga $2q_1$ por unidad de longitud actuando de abajo arriba; el factor dinámico es $n = 2$.

Así como el cable bajo el peso de la nieve tenía la flecha h_1 que se calculaba por medio de la ecuación

$$4h_1^2EF = (q + q_1)\,3l^4$$

(según el problema 73), la flecha h_2 se determinará por medio de la ecuación

$$4h_2^2EF = (q - q_1)\,3l^4.$$

550. Al romperse el tirante $\overline{AC}$, el brazo $\overline{AB}$ recibe súbitamente la acción de la fuerza P, el factor dinámico, según el problema 545, es $n = 2$ y la carga que produce la rotura del brazo se deduce de la fórmula que expresa el momento flector

$$M = 2Pl = k_b \cdot J/e.$$

Según el resultado del problema 371 (d), tenemos

$$J = 0{,}023\,B^4,$$

y, además, $e = B/2$; siendo $B = 4{,}6$ cm. y $l = 40$ cm., resulta

$$P = 144{,}5 \text{ kg.}$$

551. Según la fórmula (19), el alargamiento de una barra debido al peso Q, a la distancia x de la sección superior, es

$$\Delta x = Qx/EF,$$

prescindiendo del peso propio, y el alargamiento total será

$$\Delta l = Ql/EF.$$

Por lo tanto, según las ecuaciones (107) y (109), sustituyendo y y f por Δx y Δl, tendremos

$$G_1 = \Sigma \Delta G \frac{\Delta x}{\Delta l} = \int_0^l \frac{x}{l}\frac{G}{l}\,dx = \frac{G}{2},$$

y

$$G_2 = \Sigma \Delta G \left(\frac{\Delta x}{\Delta l}\right)^2 = \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 \frac{G}{l}\,dx = \frac{G}{3}.$$

El trabajo elástico del peso estático Q sería, según la fórmula (99),

$$A = \frac{1}{2}\frac{Q^2l}{EF};$$

por lo tanto, según las ecuaciones (110) y (112), el factor dinámico es

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q + G/3}{(Q + G/2)^2} \cdot \frac{2EFh}{l}}.$$

552. La velocidad de dilatación de la carga estática es 0,0004/seg., y la de la dinámica, 100/seg.

553. Según los resultados del problema **69**, llamando x a la distancia de la sección a F_0 y a a la altura de la pirámide suplementaria, se tiene

$$\Delta x = \frac{Qax}{EF_0(a + x)}$$

y

$$\Delta l = \frac{Qal}{EF_0(a + l)}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones (107) y (109) Δx y Δl en vez de y y l, y, además, $\gamma F dx = \gamma F_0 \left(\frac{a + x}{a}\right)^2 dx$ en lugar de ΔG, tendremos

$$G_1 = \Sigma \Delta G \frac{\Delta x}{\Delta l} = \frac{\gamma F_0 (a + l)}{a^2 l} \int_0^l x(a + x)\, dx = \frac{1}{6} \gamma F_1 l \frac{2l + 3a}{l + a},$$

$$G_2 = \Sigma \Delta G \left(\frac{\Delta x}{\Delta l}\right)^2 = \frac{\gamma F_0 (a + l)^2}{a^2 l^2} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} \gamma F_1 l.$$

Además, según el problema **448**, el trabajo elástico de la carga estática Q es

$$A = \frac{Q^2 l}{2E\sqrt{F_0 F_1}}.$$

Utilizando las ecuaciones (110) y (112), el factor dinámico resulta ser

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q + \gamma F_1 l/3}{[Q + \frac{1}{3}\gamma F_1 l(\sqrt{F_0/F_1} + 2)]^2} \cdot \frac{2E\sqrt{F_0 F_1}\, h}{l}}.$$

554. Pueden utilizarse los resultados del problema **551**. Así se tiene

$$G_1 = G/2, \quad G_2 = G/3,$$

siendo $G = \pi\gamma(D^2 - d^2)l/4 = 188{,}5$ kg. el peso del cilindro hueco. El factor dinámico es

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q + G/3}{(Q + G/2)^2} \cdot \frac{2EFh}{l}} = 788,$$

siendo $Q = \pi\gamma\delta^2 l/4 = 58{,}9$ kg., $F = \pi(D^2 - d^2)/4 = 62{,}83$ cm.², $l = 400$ cm., $h = 380$ cm.

La carga estática equivalente a la dinamica valdrá, pues,

$$nQ = 46\,421 \text{ kg.}$$

y la carga unitaria máxima en el cilindro hueco será

$$\frac{nQ + G}{F} = 742 \text{ at.}$$

555. La energía cinética en el instante del choque es Gh, y el trabajo elástico en una barra sometida tan sólo al peso propio es, según el problema **446**,

$$A = \frac{1}{6}\frac{G^2 l}{EF}.$$

La ecuación (112) da inmediatamente el factor dinámico

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{6EF}{G}\frac{h}{l}}.$$

Haciendo ahora

$$nG = \sigma_0 F \quad \text{y} \quad G = Fl\gamma,$$

se deduce, finalmente,

$$h = \frac{\sigma_0}{6E}\left(\frac{\sigma_0}{\gamma} - 2l\right).$$

556. La ecuación de la línea elástica de la viga cargada con Q en un extremo es (tabla 1, n.° 4)

$$y = \frac{1}{6}\frac{Q}{EJ}x^2(3l - x),$$

y la flecha en el extremo,

$$f = \frac{1}{3}\frac{Ql^3}{EJ}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones (107) y (109) $G\,dx/l$ en vez de ΔG, se tiene

$$G_1 = \Sigma \Delta G \frac{y}{f} = \frac{G}{2l^3}\int_0^l x^2(3l - x)\,dx = \frac{3}{8}G,$$

y

$$G_2 = \Sigma \Delta G \left(\frac{y}{f}\right)^2 = \frac{G}{4l^6}\int_0^l x^4(3l - x)^2\,dx = \frac{33}{140}G.$$

Además, el trabajo elástico del peso Q actuando sin choque en el extremo de la viga es

$$A = \frac{1}{2}Qf = \frac{1}{6}\frac{Q^2 l^3}{EJ}.$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (110) y (112), se halla para el factor dinámico

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q + 33G/140}{(Q + 3G/8)^2}\frac{6EJh}{l^3}}.$$

557. Se utilizan los resultados del problema anterior, y se tiene

$$Q = 100 \text{ kg.}, \quad G = 30 \text{ kg.}, \quad J = 10\,000 \text{ cm.}^4,$$

y, por lo tanto,

$$n = 1 + \sqrt{1 + 7{,}81\,h}.$$

El máximo momento flector en la sección de empotramiento es, siendo nQ la fuerza que actúa en el extremo,

$$M = nQl + Gl/2 = k'_b J/e,$$

en donde $k'_b = 265$ at., $e = 10$ cm. Así resulta $n = 13{,}1$. De la expresión de n anteriormente hallada se deduce $h = 18{,}6$ cm.

558. El caso es idéntico al de un peso Q uniformemente repartido que cayese sobre una viga de peso $G = 0$. Por lo tanto, según la ecuación (110), $T = Qh$; además, por el problema **451** sabemos que el trabajo elástico en una viga sometida a una carga uniformemente repartida es

$$A = \frac{q^2 l^5}{240\,EJ},$$

y haciendo $ql = Q$ se deduce el factor dinámico

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{240\,EJh}{Ql^3}}.$$

559. Según la tabla 1, n.° 1 a, la ecuación de la línea elástica en una viga cargada con el peso Q en su punto medio, siendo $a = b = l/2$, es

$$y = \frac{Q}{48\,EJ}\,x\,(3l^2 - 4x^2),$$

y la flecha en el punto medio,

$$f = \frac{Ql^3}{48\,EJ},$$

y, por lo tanto, según las ecuaciones (107) y (109),

$$G_1 = \Sigma A G\,\frac{y}{f} = 2\int_0^{l/2} \frac{x\,(3l^2 - 4x^2)}{l^3}\,\frac{G}{l}\,dx = \frac{5}{8}\,G,$$

y

$$G_2 = \Sigma A G\,\left(\frac{y}{f}\right)^2 = 2\int_0^{l/2} \frac{x^2\,(3l^2 - 4x^2)^2}{l^6}\,\frac{G}{l}\,dx = \frac{17}{35}\,G.$$

El trabajo elástico del peso estático Q es, según el problema **450**, para $a = b = l/2$

$$A = \frac{Q^2 l^3}{96\,EJ}.$$

El factor dinámico será, según las ecuaciones (110) y (112),

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q + 17\,G/35}{(Q + 5/8\,G)^2} \cdot \frac{96\,EJh}{l^3}}.$$

560. Según el problema anterior, el factor dinámico es

$$n = 1 + \sqrt{1 + 3{,}267\,h},$$

sustituyendo los valores dados ($G = 217{,}2$ kg.).

Si la viga ha de romperse bajo la acción de la carga estática nQ actuando en el punto medio, ha de verificarse la siguiente igualdad:

$$nQ\,\frac{l}{4} + \frac{1}{8}\,Gl = K_b\,\frac{J}{e},$$

en donde $e = 12$ cm. De aquí resulta $n = 11{,}8$, y sustituyendo este valor en la expresión de n dada anteriormente, resulta

$$h = 35{,}4 \text{ cm.}$$

561. La línea elástica de la viga en el trozo a tiene la ecuación (tabla 2, número 3)

$$y = \frac{1}{6}\,\frac{Q}{EJ}\,\frac{b^2x^2}{l^3}\,[3al - (3a + b)\,x],$$

y la flecha bajo la carga Q es para $x = a$

$$f = \frac{1}{3}\,\frac{Q}{EJ}\,\frac{a^2b^2}{l^3}.$$

Las ecuaciones (107) y (109) dan seguidamente, poniendo $G\,dx/l$ en vez de ΔG,

$$G_1 = \Sigma\Delta G\,\frac{y}{f} = \frac{G}{2a^2bl}\int_0^a [3al - (3a + b)\,x]\,x^2dx$$

$$+ \frac{G}{2ab^2l}\int_0^b [3bl - (3b + a)\,x']\,x'^2dx' = \frac{Gl^2}{8ab},$$

$$G_2 = \Sigma\Delta G\left(\frac{y}{f}\right)^2 = \frac{G}{4a^2b^2l}\int_0^a [3al - (3a + b)\,x]^2\,x^4dx$$

$$+ \frac{G}{4a^2b^2l}\int_0^b [3bl - (3b + a)\,x']^2\,x'^4dx' = \frac{Gl^2}{140\,ab}\left(1 + \frac{3l^2}{ab}\right).$$

Además, según el problema 466, el trabajo elástico de la fuerza estática Q es

$$A = \frac{1}{6}\,\frac{Q^2a^2b^2}{EJl^3}.$$

Por lo tanto, el factor dinámico, según las ecuaciones (110) y (112), será

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Qa^2b^2 + Gl^2(ab + 3l^2)/140}{(Qab + Gl^2/8)^2}\,\frac{6EJl^3}{a^2b^2}\,h}.$$

562. Según el problema anterior, el factor dinámico es

$$n = 1 + \sqrt{1 + 260{,}2\,h},$$

sustituyendo los valores $Q = 400$ kg., $G = 954$ kg., $a = 100$ cm., $b = 400$ cm., $J = \pi(15^4 - 12^4)/4 = 23{,}463$ cm.^{4}

El máximo momento flector es, según la tabla 2, n.° 3, para la viga sometida a la acción de la fuerza aislada nQ y al peso propio G

$$nQ\frac{ab^2}{l^2} + \frac{1}{12}Gl = k_b\frac{J}{e},$$

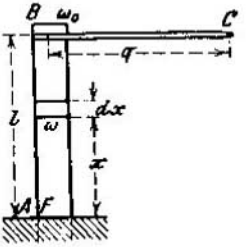
de donde, haciendo $k_b = 700$ at., $e = 15$ cm., resulta el factor dinámico $n = 41{,}2$. Igualando este valor con el hallado antes para n, resulta

$$h = 6{,}2 \text{ cm.}$$

563. Sustituyendo en las ecuaciones (107) y (109) P en vez de G, $x\vartheta$ en lugar de y y $l\vartheta$ en vez de f, siendo ϑ el ángulo de torsión por unidad de longitud, los pesos reducidos de la barra en forma de disco (siendo $AG = \gamma F dx$) son

$$P_1 = P/2, \quad P_2 = P/3$$

(véase el problema **551**).



La velocidad del punto de choque es, según la ecuación (108),

$$v_0 = \frac{Q}{Q + G_1}\sqrt{2gh},$$

en donde $G_1 = \frac{P_1 r^2}{2q^2} = \frac{Pr^2}{4q^2}$ es el peso reducido P_1 del disco en B para el punto C, o sea el peso reducido de la barra. Llamando ahora ω y ω_0 a las velocidades angulares comunicadas a la barra en las secciones x y l, se tiene

$$\omega : \omega_0 = x : l,$$

y la energía cinética producida por el choque es

$$T_0 = \frac{1}{2}\int \omega^2 dJ = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{1}{2} r^2 \frac{\omega_0^2}{l^2} x^2 \frac{\gamma F dx}{g}$$

o

$$T_0 = \frac{1}{4}\frac{P_2}{g} r^2\omega_0^2 = \frac{1}{12}\frac{Pr^2\omega_0^2}{g}.$$

Ahora bien: $v_0 = q\omega_0$, de lo cual se deduce

$$T_0 = \frac{8}{3}\frac{PQ^2r^2q^2h}{(4Qq^2 + Pr^2)^2}.$$

El trabajo elástico del peso estático Q, según las fórmulas (101) y (55), es

$$A = \frac{1}{2}M_t l\vartheta = \frac{1}{\pi}\frac{M_t^2 l}{Gr^4},$$

en donde $M_t = Qq$. Para el cálculo del factor dinámico n puede también

utilizarse la ecuación (112); con los valores hallados de T_0 y A se halla para n el valor

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{8\pi}{3} \frac{PGr^6h}{(4Qq^2 + P^2r^2)^2 l}}.$$

La carga unitaria máxima en el árbol es, según la fórmula (54),

$$\tau_{máx} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{nQq}{r^3}.$$

siendo n el valor hallado.

564. Según el principio de la conservación de la energía, la variación de la energía cinética es igual a la suma de los trabajos exteriores e interiores; por lo tanto,

$$T - T_0 = \frac{1}{2} \frac{Q + G_2}{g} (v^2 - v_0^2) = Qy - A,$$

siendo G_2 el peso reducido de la viga para el punto de choque [según la ecuación (109)], v_0 la velocidad inicial del punto de choque, v su velocidad al cabo del tiempo t, y el desplazamiento dinámico en el mismo punto y A el trabajo elástico correspondiente al desplazamiento y. Este trabajo elástico es, según el problema 440, sustituyendo f por y

$$A = \frac{24EJ}{l^3} y^2 = \frac{k}{2} y^2,$$

y, por lo tanto,

$$\frac{Q + G_2}{g} (v^2 - v_0^2) = 2Qy - ky^2,$$

y derivando se tiene

$$\frac{Q + G_2}{g} v\,dv = (Q - ky)\,dy.$$

Para el movimiento del punto medio de la viga resulta

$$v\,dv = \frac{d^2y}{dt^2} dy,$$

de donde

$$\frac{Q + G_2}{g} \frac{d^2y}{dt^2} = Q - ky.$$

La flecha de la viga con carga estática Q es, según la tabla 1, n.° 13,

$$f = \frac{Ql^3}{48EJ} = \frac{Q}{k}.$$

La ecuación del movimiento, haciendo $\lambda = \sqrt{\frac{kg}{Q + G_2}}$, toma la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \lambda^2 (f - y).$$

La integración de esta ecuación da

$$y = A \operatorname{sen} \lambda t + B \cos \lambda t + f.$$

Para determinar las constantes A y B, tenemos

$$v = \frac{dy}{dt} = A\lambda \cos \lambda t - B\lambda \operatorname{sen} \lambda t, \tag{a}$$

y poniendo para el principio del movimiento, o sea para $t = 0$, los valores

$$y = 0, \quad v = v_0,$$

resulta

$$A = v_0/\lambda, \quad B = -f,$$

y, por lo tanto, la ecuación del movimiento es

$$y = \frac{v_0}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda t + f(1 - \cos \lambda t), \tag{b}$$

en donde

$$\lambda^2 = \frac{g}{f} \frac{Q}{Q + G_2},$$

y según el problema 559,

$$G_2 = 17\, G/35.$$

Para hallar la máxima flecha se pone en la ecuación (a)

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,$$

y resulta

$$\operatorname{tg} \lambda t = -\frac{v_0}{f\lambda}. \tag{c}$$

La ecuación (b) nos da

$$f_1 = f\,[1 + \sqrt{1 + (v_0/f\lambda)^2}].$$

La expresión encerrada dentro del paréntesis es el factor dinámico [según la ecuación (106)].

La velocidad inicial es

$$v_0 = \frac{Q}{Q + G_1} \sqrt{2gh},$$

siendo h la altura de caída del peso Q, y, según el problema 559, se tiene

$$G_1 = 5\,G/8.$$

565. Solución análoga a la del problema anterior. La ecuación del movimiento es

$$\frac{1}{2} \frac{Q + G_2}{g} (v^2 - v_0^2) = Qy - \frac{EF}{2l} y^2$$

y

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \lambda^2 (f - y),$$

en donde $f = Ql/EF$ es el alargamiento de la barra debido al peso estático Q, $\lambda = \sqrt{\frac{EFg}{(Q + G_1)\,l}}$ y, según el problema 551, $G_2 = G/3$. Así se obtiene, como en el problema 564,

$$y = \frac{v_0}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda t + f(1 - \cos \lambda t),$$

en la que v_0 velocidad inicial, se deduce de la igualdad

$$v_0 (Q + G_1) = Q \sqrt{2gh}.$$

Según el problema **551**, tenemos $G_1 = G/2$. La máxima variación de longitud se obtiene haciendo $\frac{dy}{dt} = 0$, como en el problema **564**, para un valor

$$y_{\text{máx}} = f\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{f\lambda}\right)^2}\right]$$

o

$$y_{\text{máx}} = f\left[1 + \sqrt{1 + \frac{Q + G/3}{(Q + G/2)^2}\,\frac{2EFh}{l}}\right].$$

El factor de f es el factor dinámico que ya se halló en el problema **551**.

La máxima velocidad corresponde al extremo de la barra, verificándose $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, o bien $y = f$. Su valor es

$$v^2_{\text{máx}} = Q^2 g\left[\frac{2h}{(Q + G_1)^2} + \frac{l}{EF(Q + G_2)}\right].$$

566. Con una carga súbita el factor dinámico es $n = 2$ (según el problema **545**), y, por lo tanto, el alargamiento máximo de la barra será

$$y_{\text{máx}} = 2f = Gl/EF$$

(esto se deduce también del resultado del problema anterior haciendo $h = 0$).

La ecuación del movimiento oscilatorio del extremo de la barra es

$$y = f(1 - \cos \lambda t),$$

siendo $\lambda = \sqrt{EFg/G_2 l} = \sqrt{3EFg/Gl}$ (véase el problema anterior).

El período es

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sqrt{\frac{Gl}{3EFg}}.$$

La máxima velocidad corresponde al extremo de la barra, para $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, de donde $y = f = \frac{Gl}{2EF}$ y

$$v^2_{\text{máx}} = \frac{3}{4}\,\frac{Glg}{EF}.$$

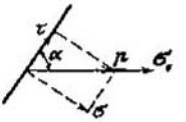
Formulario

A continuación se dan las fórmulas necesarias para la resolución de los problemas.

El estado elástico lineal

Siendo σ_1 la tensión principal,

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \operatorname{sen}^2 \alpha \text{ es la tensión normal,} \\ \tau &= \sigma_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \text{ es la tensión tangencial,} \\ p &= \sigma_1 \operatorname{sen} \alpha \text{ es la tensión resultante} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

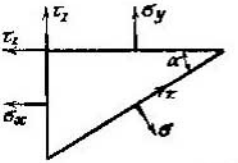


para un plano que forme el ángulo α con σ_1.

El estado elástico plano

Siendo $\sigma_x, \sigma_y, \tau_z$ las tensiones correspondientes a dos planos perpendiculares entre sí, para un tercer plano cualquiera que forme el ángulo α con σ_x se tiene

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \operatorname{sen}^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_z \operatorname{sen} 2\alpha, \\ \tau &= (\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \tau_z \cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$



Siendo σ_1 y σ_2 las tensiones principales en un punto, y α el ángulo que un plano cualquiera forma con σ_1, las tensiones correspondientes a este plano son

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \operatorname{sen}^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \\ \tau &= (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Si p es la tensión resultante en el plano definido por la inclinación α, cuyo valor es $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$, y p_x, p_y son sus componentes según los ejes x e y, los valores de estos componentes son:

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \sigma \operatorname{sen} \alpha + \tau \cos \alpha = \sigma_x \operatorname{sen} \alpha + \tau_z \cos \alpha, \\ p_y &= \sigma \cos \alpha - \tau \operatorname{sen} \alpha = \sigma_y \cos \alpha + \tau_z \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

El estado elástico triple

Sean σ_1, σ_2, σ_3 las tres tensiones principales en un punto, y $\bar{p}$ la tensión correspondiente a un plano, cuya normal tiene por cosenos directores a, b y c respecto a los ejes de las tensiones principales; las proyecciones de $\bar{p}$ sobre los ejes son

$$\left.\begin{aligned} & p_x = a\sigma_1, \quad p_y = b\sigma_2, \quad p_z = c\sigma_3, \\ \text{y} \quad & p^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + c^2\sigma_3^2; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

por lo tanto, la tensión normal sobre el plano es

$$\sigma = a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + c^2\sigma_3, \quad (6)$$

y la tangencial,

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2. \quad (7)$$

El estado elástico en un punto queda definido por las tres tensiones normales σ_x, σ_y, σ_z y las tres tangenciales τ_x, τ_y, τ_z respecto a tres planos de referencia normales entre sí. Las tensiones principales σ (es decir, σ_1, σ_2, σ_3) y los cosenos directores a, b, c de los planos principales se calculan valiéndose de las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} a(\sigma_x - \sigma) + b\tau_z + c\tau_y &= 0, \\ c\tau_x + b(\sigma_y - \sigma) + a\tau_z &= 0, \\ a\tau_y + b\tau_x + c(\sigma_z - \sigma) &= 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Deformaciones

ε = dilatación = relación de la variación de la distancia entre dos puntos después de la deformación a la distancia primitiva.

γ = distorsión = variación del ángulo recto que forman dos planos a consecuencia de la deformación.

Sean u, v, w las componentes del desplazamiento de un punto $P(x, y, z)$: las dilataciones según los ejes ε_x, ε_y, ε_z y las distorsiones γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} en los tres planos yz, zx y xy vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial k}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ &\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

La dilatación según la dirección (a, b, c) es

$$\varepsilon = a^2\varepsilon_x + b^2\varepsilon_y + c^2\varepsilon_z + bc\gamma_{yz} + ca\gamma_{zx} + ab\gamma_{xy}. \qquad (10)$$

Si x, y, z son las direcciones de las dilataciones principales ε_1, ε_2, ε_3, se tiene

$$\varepsilon = a^2\varepsilon_1 + b^2\varepsilon_2 + c^2\varepsilon_3. \qquad (11)$$

Además, llamando
e a la dilatación cúbica = relación de la variación de un volumen al volumen primitivo, su valor será

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \qquad (12)$$

Ley de Hooke (de dilataciones y tensiones)

Para las tensiones normales,

$$\sigma = E\varepsilon; \qquad (13\ a)$$

para las tensiones tangenciales,

$$\tau = G\gamma, \qquad (13\ b)$$

siendo E y G los módulos de elasticidad longitudinal y transversal, respectivamente.

Cuerpos isótropos

Relación entre G, E y m:

$$G = \frac{m}{2(m+1)}E, \qquad (14)$$

siendo m el coeficiente de Poisson, es decir, la relación de la dilatación longitudinal a la contracción transversal.

Ley de Hooke generalizada (tensiones principales):

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right),\\ \sigma_2 &= \frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2}\right),\\ \sigma_3 &= \frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

o resueltas para las dilataciones principales:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{m}\right),\\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3+\sigma_1}{m}\right),\\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{m}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Cargas de resistencia

A = carga de fatiga, es la que produce la rotura del material sometido a un cambio muy repetido de esfuerzos, oscilando entre $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$.
K_z = carga estática de rotura por tracción, cuando $\sigma_{mín} = \sigma_{máx}$.
U = carga intermitente de rotura, cuando $\sigma_{mín} = 0$.
V = carga oscilatoria o alternativa de rotura, cuando $\sigma_{mín} = -\sigma_{máx}$.

Valores medios según las experiencias de Wöhler y Bauschinger para

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Hierro dulce:} & K_z = 3640 \text{ at.}, U = 2160 \text{ at.}, V = 1180 \text{ at.},\\ \text{Acero dulce:} & K_z = 4200 \text{ at.}, U = 2400 \text{ at.}, V = 1320 \text{ at.},\\ \text{Acero semiduro:} & K_z = 6040 \text{ at.}, U = 2900 \text{ at.}, V = 1540 \text{ at.}\end{array}\right\} \qquad (17)$$

Carga o coeficiente de trabajo admisible de estos tres materiales:

k_z' (tracción) $= k_d'$ (compresión) $= 2A/7$ (siendo A la carga de fatiga). (18)

Resistencia a la tracción

Variación de longitud de una pieza prismática recta de longitud l, sección F y peso G:

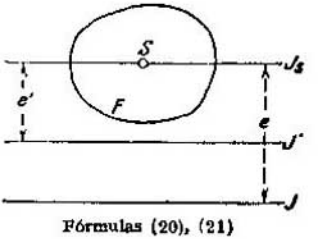
$$\Delta l = \frac{(P + G/2)}{EF}\, l, \qquad (19)$$

siendo P el peso que actúa en el extremo inferior de la pieza.

Momentos de inercia y momentos centrífugos de las superficies

$$J = J_s + F e^2. \qquad (20)$$

$$J = J' + F(e^2 - e'^2). \qquad (21)$$



Fórmulas (20), (21)

Rectángulo: respecto a la base b,

$$J = bh^3/3; \qquad (22)$$

respecto al eje que pasa por el centro de gravedad paralelo a b,

$$J = bh^3/12. \qquad (23)$$

Triángulo: respecto a la base b,

$$J = bh^3/12; \qquad (24)$$

respecto a la paralela a b que pasa por el otro vértice,

$$J = b h^3/4. \tag{25}$$

Círculo: respecto al diámetro $2r$,

$$J = \pi r^4/4. \tag{26}$$

Elipse: de semiejes a y b respecto al eje $2a$,

$$J = \pi a b^3/4. \tag{27}$$

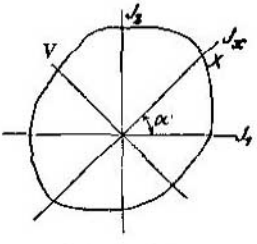
Radio de giro:

$$i = \sqrt{J/F}. \tag{28}$$

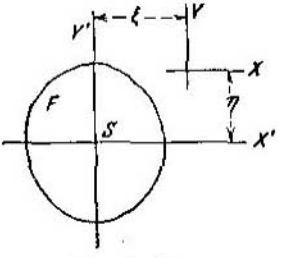
Momentos de inercia respecto a unos ejes que forman el ángulo α con los ejes principales:

$$\left.\begin{aligned} J_x &= J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \operatorname{sen}^2 \alpha, \\ J_{xy} &= (J_1 - J_2) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

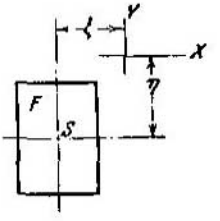
siendo J_1 y J_2 los momentos de inercia principales.



Fórmula (29)



Fórmula (30)



Fórmula (31)

Momento centrífugo:

$$J_{xy} = J_{x'y'} + F \xi \eta, \tag{30}$$

siendo S el centro de gravedad de la superficie F. Cuando $J_{x'y'} \approx 0$, se tiene más sencillamente

$$J_{xy} = F \xi \eta. \tag{31}$$

Momentos de inercia y centrífugo respecto a unos ejes x', y' que forman el ángulo α con los ejes xy:

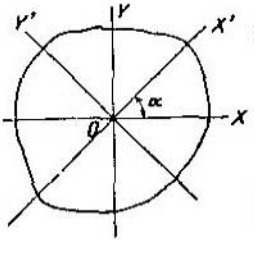
$$J_{x'} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \operatorname{sen}^2 \alpha - J_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha, \tag{32}$$

$$J_{y'} = J_x \operatorname{sen}^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha,$$

$$J_{x'y'} = (J_x - J_y) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \tag{33}$$

Si x', y' son los ejes principales, se tiene

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x}. \tag{34}$$



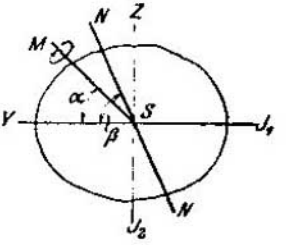
Momentos de inercia principales:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}, \\ J_2 &= \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Para cada par de ejes conjugados de la elipse de inercia se tiene

$$J_{xy} = 0.$$

Tensiones y ejes de flexión (fibra neutra)



M = eje del momento flector,

NN = fibra o línea neutra (eje de flexión).

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_1}{J_2}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (36)$$

Curvatura de la línea elástica:

$$\frac{1}{\varrho} = \pm\frac{M}{E}\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{J_1^2} - \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{J_2^2}}. \qquad (37)$$

Tensión en el punto y, z:

$$\sigma = M\left(\frac{y\operatorname{sen}\alpha}{J_2} - \frac{z\cos\alpha}{J_1}\right) \qquad (38)$$

En particular para $\alpha = 0$:

$$\beta = 0, \quad \text{y} \quad \sigma = -\frac{Mz}{J}, \qquad (39)$$

$$\frac{1}{\varrho} = \pm\frac{M}{EJ}. \qquad (40)$$

Ecuación diferencial de la línea elástica (para pequeñas curvaturas):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}. \qquad (41)$$

Carga de trabajo admisible para la fundición trabajando por flexión según Bach:

$$k_b' = \mu_0 k_z' \sqrt{e_1 z_0}. \qquad (42)$$

siendo: k_z' = carga admisible por tracción,

e_1 = distancia de la fibra más tendida al eje y,

z_0 = coordenada del c. d. g. de la zona de tracción de la sección,

μ_0 = 1,2 cuando esa zona de tracción está limitada por una recta paralela al eje. y

= 1,3 en los demás casos.

Vigas de igual resistencia a flexión

Si $e = e_1 = e_2$ es la distancia de la fibra neutra a la más cargada de la sección, M el momento flector y J el m. de i. de la sección, la ecuación de condición es

$$\frac{Me}{J} = k_b'. \qquad (43)$$

Tabla 1. —

N.°	Forma de carga. Aspecto de las líneas de momentos y elástica	Reacciones de los apoyos		Momentos		
		A	B	M_x izquierda de L	M_A	M_B
1		$P\frac{b}{l}$	$P\frac{a}{l}$	$P\frac{bx}{l}$ $M_{máx} = \frac{Pab}{l}$ para $x = a$	0	0
1a	$a = b = \frac{l}{2}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2}$	$P\frac{x}{2}$	0	0
2		$-\frac{M}{l}$	$+\frac{M}{l}$	$-\frac{Mx}{l}$ $\left[-\frac{Ma}{l} \text{ para } x = a-0 \quad +\frac{Mb}{l} \text{ para } x = a+0\right]$	0	0
2a		$-\frac{M}{l}$	$+\frac{M}{l}$	$M\frac{l-x}{l}$	M	0
2b		$-\frac{M}{l}$	$+\frac{M}{l}$	$-\frac{Mx}{l}$	0	M
3		$q\frac{l}{2}$	$q\frac{l}{2}$	$q\frac{lx}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right)$ $M_{máx} = \frac{ql^2}{8}$ para $x = \frac{l}{2}$	0	0

Vigas isostáticas

Ecuación de la línea elástica	Flechas ($f_A = 0$)		Inclinaciones		
	f_B	f_L	ψ_A	ψ_B	ψ_L
$y = \frac{Pb}{6EJl} x(l^2 - b^2 - x^2)$, $y_1 = \frac{Pa}{6EJl} x_1(l^2 - a^2 - x_1^2)$	0	$\frac{P}{3EJ} \frac{a^2b^2}{l}$	$\frac{Pab}{6EJl}(l+b)$	$\frac{Pab}{6EJl}(l+a)$ (en dirección x_1)	$\frac{Pba}{6EJl}(b-a)$
$y = \frac{Pl^3}{12EJ}\left[\frac{3}{4}\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$ $y_1 = \frac{Pl^3}{12EJ}\left[\frac{3}{4}\frac{x_1}{l} - \left(\frac{x_1}{l}\right)^3\right]$	0	$\frac{Pl^3}{48EJ}$	$\frac{Pl^2}{16EJ}$	$\frac{Pl^2}{16EJ}$ (en dirección x_1)	0
$y = -\frac{M}{6EJl} x(l^2 - 3b^2 - x^2)$ $y_1 = +\frac{M}{6EJl} x_1(l^2 - 3a^2 - x_1^2)$	0	$-\frac{M}{3EJ}\frac{ab}{l}(a-b)$ (neg. para $a > b$)	$-\frac{M}{6EJl}(l^2 - 3b^2)$	$\frac{M}{6EJl}(l^2 - 3a^2)$ (en dirección x_1)	$\frac{M}{3EJl}(a^2 - ab + b^2)$
$y = \frac{M}{6EJl} x_1(l^2 - x_1^2)$; $x_1 = l - x$ $= \frac{M}{6EJl}(l-x)(2l_x - x^2)$	0	—	$\frac{Ml}{3EJ}$	$\frac{Ml}{6EJ}$ (en dirección x_1)	—
$y = -\frac{M}{6EJl} x(l^2 - x^2)$	0	—	$-\frac{Ml}{6EJ}$	$+\frac{Ml}{3EJ}$	—
$y = \frac{ql^4}{24EJ}\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$	0	$f_{máx} = \frac{5ql^4}{384EJ}$ para $x = \frac{l}{2}$	$\frac{ql^3}{24EJ}$	$-\frac{ql^3}{24EJ}$	—

Tabla 1 *(continuación)*.—

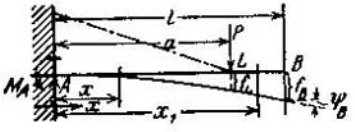
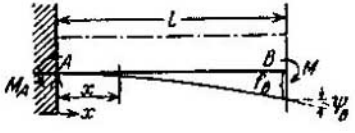
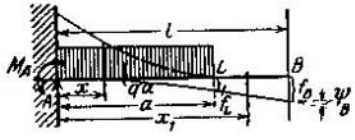
N.	Forma de carga. Aspecto de las líneas de momentos y elástica	Reacciones de los apoyos		Momentos		
		A	B	M_x izquierda de L	M_A	M_B
4		P	0	$-P(a-x)$	$-Pa$	0
5		0	0	$-M$	$-M$ para $x=+0$	$-M$ para $x=l-0$
6		qa	0	$-\frac{q}{2}(a-x)^2$	$-\frac{q}{2}a^2$	0

Tabla 2.

N.	Forma de carga. Aspecto de las líneas de momentos y elástica	Reacciones de los apoyos			Momentos		
		A	B	C	$M_A = M_{(x=+0)}$	$M_B = M_{(x=l-0)}$	M_L (ó M')
1		$\frac{P}{2}\left[2-3\left(\frac{a}{l}\right)^2+\left(\frac{a}{l}\right)^3\right] = \frac{Pb(3l^2-b^2)}{2l^3}$	$\frac{P}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(3-\frac{a}{l}\right)$	—	$-\frac{Pab}{2l^2}(l+b)$	0	$M_L = \frac{Pa^2b(3l-a)}{2l^3}$
1a	$a=b=\frac{l}{2}$	$\frac{11P}{16}$	$\frac{5P}{16}$	—	$-\frac{3Pl}{16}$	0	$M_L = \frac{5Pl}{32}$

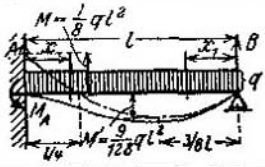
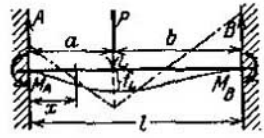
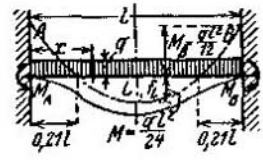
Vigas isostáticas

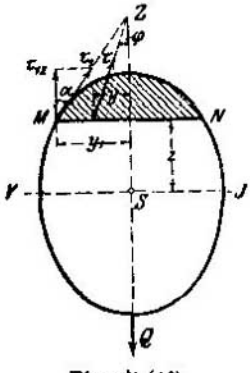
Ecuación de la línea elástica	Flechas ($f_A=0$)		Inclinaciones		
	f_B	f_L	φ_A	φ_B	φ_L
$y=\frac{Px^2}{6EJ}[3a-x]$ $y_1=\frac{Pa^2}{6EJ}[3x_1-a]$	$\frac{Pa^2}{6EJ}(3l-a)$	$\frac{Pa^2}{3EJ}$	0	$\frac{Pa^2}{2EJ}$	$\frac{Pa^2}{2EJ}$
$y=\frac{M}{EJ}\frac{x^2}{2}$	$\frac{Ml^2}{2EJ}$	—	0	$\frac{M}{EJ}l$	—
$y=\frac{qx^2}{24EJ}[6a^2-4ax+x^2]$ $y_1=\frac{qa^3}{24EJ}[4x_1-a]$	$\frac{qa^3}{24EJ}(4l-a)$	$\frac{qa^4}{8EJ}$	0	$\frac{qa^3}{6EJ}$	$\frac{qa^3}{6EJ}$

Vigas hiperestáticas

Flechas	Inclinaciones				Observaciones
f_L (ó $f_{máx}$)	φ_A	φ_B	φ_O	φ_L	
$\frac{Pa^2b^2(3l+b)}{12EJl^3}$	0	$-\frac{P}{EJ}\frac{a^2b}{4l}$	—	$\frac{Pa^2b(2l^2-4al+a^2)}{4EJl^3}$	**Cálculo:** $f_B=\frac{Pa^3}{3EJ}+\frac{Pa^2b}{2EJ}=\frac{Bl^3}{3EJ}$, de donde $B=\ldots$
$\frac{7}{768}\frac{Pl^3}{EJ}$	0	$-\frac{Pl^2}{32EJ}$	—	$\frac{Pl^2}{128EJ}$	**Ecuación de la línea elástica:** $\overline{AL}: y=\frac{P}{96EJ}x^2l\left(9-11\frac{x}{l}\right)$ $\overline{BL}: y=\frac{Pl^3}{32EJ}\left[\frac{x_1}{l}-\frac{5}{3}\left(\frac{x_1}{l}\right)^3\right]$

Tabla 2 *(continuación)*. —

N.°	Forma de carga. Aspecto de las líneas de momentos y elástica	Reacciones de los apoyos			Momentos		
		A	B	C	$M_A = M_{(x=+0)}$	$M_B = M_{(x=l-0)}$	M_L (ó M')
2		$\frac{5ql}{8}$	$\frac{3ql}{8}$	—	$-\frac{ql^2}{8}$	0	$M' = \frac{9ql}{128}$ a la dist. $3l/8$ de B ($< M_L$!)
3		$\frac{Pb^2(3a+b)}{l^3}$	$\frac{Pa^2(a+3b)}{l^3}$	—	$-\frac{Pab^2}{l^2}$	$P\frac{a^2b}{l^2}$	$M_L = \frac{P}{8}(l-4a)$
3a	$a = b = \frac{l}{2}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2}$	—	$-\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{8}$	$M_L = \frac{Pl}{8}$
4		$q\frac{l}{2}$	$q\frac{l}{2}$	—	$-q\frac{l^2}{12}$	$q\frac{l^2}{12}$	$M_L = \frac{ql^2}{24}$



Fórmula (46)

Esfuerzo cortante

La tensión tangencial producida por un esfuerzo cortante Q tiene una componente paralela a SZ, que vale

$$\tau_z = \tau_{1z} = \frac{SQ}{2y_f J}, \qquad (44)$$

siendo J el momento de inercia de la sección respecto al eje Sy que pasa por el centro de gravedad, y $S = fz_0$ el momento estático del área rayada respecto al eje Sy.

Tensión en el borde:

$$\tau_1 = \tau_{1z}/\cos\alpha. \qquad (45)$$

Tensión en un punto cualquiera y, z:

$$\tau = \tau_z/\cos\varphi \qquad (46)$$

Vigas hiperestáticas

Flechas	Inclinaciones				Observaciones
f_L (ó $f_{máx}$)	ψ_A	ψ_B	ψ_C	ψ_L	
$f_{máx} = 0{,}00544\,\frac{ql^4}{EJ}$ (para $x \approx 0{,}58\,l$)	0	$-\frac{ql^3}{48EJ}$	—	0 (para $x \approx 0{,}58\,l$)	Ecuación de la línea elástica: $y = \frac{ql^4}{48EJ}\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$
$\frac{P}{3EJ}\,\frac{a^2b^2}{l^3}$	0	0	—	$\frac{Pa^2b^2(b-a)}{2EJl^3}$ (para $b > a$)	Cálculo: $f_B = \frac{Pa^3}{3EJ} + \frac{Pa^2b}{2EJ} = \frac{Bl^3}{3EJ} - \frac{M_Bl^2}{2EJ}$; $\psi_B = \frac{Pa^2}{2EJ} = \frac{Bl^2}{2EJ} - \frac{M_Bl}{EJ}$, de donde $B = \ldots$, $M_B = \ldots$
$\frac{Pl^3}{192EJ}$	0	0	—	0	Ecuación de la línea elástica: $y = \frac{P}{48EJ}\,x^2(3l - 4x)$
$\frac{ql^4}{384EJ}$ (para $x = \frac{l}{2}$)	0	0	—	0	Ecuación de la línea elástica: $y = \frac{q}{24EJ}\,x^2(l-x)^2$

Tensión tangencial máxima en el rectángulo:

$$\tau_{máx} = 3Q/2F. \tag{47}$$

Tensión tangencial máxima en el círculo:

$$\tau_{máx} = 4Q/3F. \tag{48}$$

Sección reducida:

$$F_0 = Q/\tau_{máx}. \tag{49}$$

Coeficiente de trabajo admisible k'_s por esfuerzo cortante (en función del de tracción k'_t):

$$k'_s \leq k'_t\,\frac{m}{m+1}, \tag{50}$$

siendo m el coeficiente de Poisson.

Para el hierro, $m = 10/3$ y, por lo tanto,

$$k'_s \leq \frac{10}{13}\,k'_t. \tag{52}$$

Torsión

M_t es el momento o par de torsión de las fuerzas exteriores.
ϑ es el ángulo de giro por unidad de longitud, expresado en radianes.
G es el módulo de elasticidad transversal o para el esfuerzo cortante.

$$\vartheta^0 = \vartheta \frac{180^0}{\pi}. \tag{53}$$

Círculo de radio r:

$$M_t = \frac{\pi}{2} r^3 \tau_{máx}, \tag{54}$$

$$\vartheta = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{G r^4} = \frac{\tau_{máx}}{G r} \tag{55}$$

Anillo de radios R y r:

$$M_t = \frac{\pi}{2} \frac{R^4 - r^4}{R} \tau_{máx}, \tag{56}$$

$$\vartheta = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{G(R^4 - r^4)} = \frac{\tau_{máx}}{G R}. \tag{57}$$

Elipse de semiejes $b < c$:

$$M_t = \frac{\pi}{2} b^2 c \tau_{máx}, \tag{58}$$

$$\vartheta = \frac{1}{\pi} \frac{b^2 + c^2}{b^4 c^2} \frac{M_t}{G} = \frac{1}{2} \frac{b^2 + c^2}{b c^2} \frac{\tau_{máx}}{G} \tag{59}$$

Tensión en el punto y, z:

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{bc} \sqrt{\frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}. \tag{60}$$

Anillo elíptico, semiejes exteriores $b < c$, íd. interiores $b_1 < c_1$, $b_1 : b = c_1 : c = a$:

$$M_t = \frac{\pi}{2} b^2 c (1 - a^4) \tau_{máx}. \tag{61}$$

Rectángulo de dimensiones $h > b$:

$$M_t = \eta_2 C^2 h \tau_{máx}, \tag{62}$$

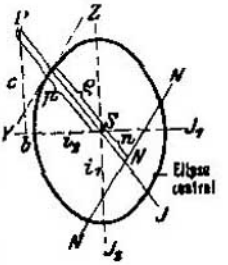
$$\vartheta = \frac{M_t}{\eta_3 b^3 h G} = \frac{\eta_2}{\eta_3} \frac{\tau_{máx}}{b G}. \tag{63}$$

Los valores de η_2 y η_3 (según Weber, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ing.-Wesens, cuaderno 249, 1921) se toman de la

Tabla 3

$h/b =$	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
η_2	0,21	0,23	0,25	0,27	0,28	0,30	0,31	0,31	0,31
η_3	0,14	0,20	0,23	0,26	0,28	0,30	0,31	0,31	0,31

Fibra neutra y núcleo central



Siendo J_1, J_2 los m. de i. principales,

$$i_1 = \sqrt{J_1/F}, \quad i_2 = \sqrt{J_2/F} \tag{64}$$

los radios de giro correspondientes, P el punto de aplicación de la fuerza normal a la sección, $\overline{NN}$ la línea neutra correspondiente, se tiene

$$pn = -\frac{i_1^2 i_2^2}{i^2} = -\varrho^2. \tag{65}$$

Si J es el m. de i. de la sección para la línea PS, el radio de giro correspondiente será $i = \sqrt{J/F}$. Para los ejes principales J_1, J_2, se tiene

$$p_1 n_1 = -i_2^2, \qquad p_2 n_2 = -i_1^2. \tag{66}$$

Tracción o compresión y flexión

Sea P el esfuerzo de tracción o compresión, y M el momento flector; las fibras extremas respecto a la neutra tienen las cargas o tensiones:

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{M}{W}, \tag{67}$$

siendo F el área de la sección, y W su momento resistente.

Siendo p la distancia del esfuerzo de tracción o compresión al c. d. g. de la sección, la ecuación anterior puede escribirse en la forma

$$\sigma = \frac{P}{F}\left[1 \pm \frac{pF}{W}\right]. \tag{68}$$

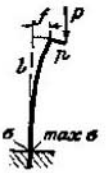
Si el punto de aplicación de la fuerza P tiene coordenadas b y c respecto a los ejes principales de inercia, la tensión en el punto de coordenadas y, z vale

$$\sigma = P\left[\frac{1}{F} + \frac{by}{J_2} + \frac{cz}{J_1}\right]. \tag{69}$$

Cuando P es una compresión, estas fórmulas son aplicables solamente cuando la pieza es corta; es decir, cuando tiene poca esbeltez.

Si el cuerpo tiene la forma de una barra cuya longitud es l y cuyo m. d. i. referido a la línea neutra (eje de flexión) es J, las tensiones máxima y mínima vienen dadas por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{máx} &= -\frac{P}{F}\left[1 + \frac{pF}{W_2 \cos \omega l}\right] \\ \sigma &= -\frac{P}{F}\left[1 - \frac{pF}{W_1 \cos \omega l}\right], \end{aligned}\right\} \tag{70}$$



en donde

$$\omega = \sqrt{P/EJ}.$$

La flecha en el extremo superior es

$$f = p\left(\frac{1}{\cos \omega l} - 1\right). \tag{71}$$

La carga de rotura para esta fuerza de compresión excéntrica es

$$B = \frac{F K}{\mu \left[1 + \frac{p F}{W_z \cos \omega l} \right]} \tag{72}$$

Aproximadamente se puede poner

$$\frac{1}{\cos \omega l} = 1 + \frac{1}{2} (\omega l)^2 + \frac{5}{24} (\omega l)^4 . \tag{73}$$

siendo μ un coeficiente experimental que, según Tetmajer, vale

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Para la madera,} & \mu = 0{,}70 + 0{,}03\,\lambda. & \\ \text{Para el hierro dulce,} & \mu = 1{,}20 & \text{para una sección achatada.} \\ & \quad = 1{,}08 & \text{» » » alargada.} \\ \text{Para el acero dulce,} & \mu = 1{,}37 & \text{» » » achatada.} \\ & \quad = 1{,}23 & \text{» » » alargada.} \end{array}\right\} \tag{74}$$

λ es $= l/i$ grado de esbeltez e i el radio de giro referido a la línea neutra.

Esfuerzo cortante y flexión

Manera de conocer cuándo una barra ha de calcularse por esfuerzo cortante o por flexión:

$$\begin{array}{l} \text{Esfuerzo cortante} \\ \text{Flexión} \end{array} \left\{ \frac{\text{Máx. mom. flector}}{\text{Esfuerzo cortante máx.}} \lesseqgtr \frac{m+1}{m} \frac{\text{momento resistente}}{F_0} \right. . \tag{75}$$

Para la significación de F_0, véase la fórmula (49).

$$\text{Tensiones principales:} \quad \left.\begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}, \\ \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}. \end{array}\right\} \tag{76}$$

Inclinación α de la tensión principal respecto al eje de la viga:

$$\text{tg. } 2\alpha = -2\tau/\sigma. \tag{77}$$

En estas fórmulas σ es la tensión normal debida a la flexión, y τ es la tensión tangencial debida al esfuerzo cortante.

Flexión y torsión

Si ε_1 es la dilatación máxima, el valor de la tensión principal reducida es

$$E\varepsilon_1 = \frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} \leq k_b' , \tag{78}$$

siendo m el coeficiente de Poisson (es decir, la relación de las dilataciones longitudinal y transversal), σ la tensión o carga unitaria debida a la flexión, τ la debida al esfuerzo cortante, k_b' la carga de trabajo admisible por flexión y

$$\alpha_0 = \frac{m}{m+1} \frac{k_n'}{k_t'} \tag{78a}$$

la relación de Bach (relación de dilataciones), en la cual, según la forma de solicitación de la pieza, hay que poner en vez de k_n' uno de los valores k_z', k_d' ó k_b' y k_t' la carga de trabajo admisible por torsión.

Para el hierro, $m = 10/3$, de lo cual resulta

$$E\varepsilon_1 = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2}, \tag{79}$$

$$\alpha_0 = \frac{k_n'}{1{,}3\,k_t'}. \tag{80}$$

Si M_b es el momento flector y M_t el de torsión, el diámetro d de una sección circular se deducirá de la fórmula

$$d^3 = \frac{32}{\pi k_b'}\left[0{,}35\,M_b + 0{,}65\sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 M_t)^2}\right], \tag{81}$$

y para una sección anular con una relación de diámetros $d/D = \alpha$

$$D^3 = \frac{32}{\pi k_b'(1-\alpha^4)}\left[0{,}35\,M_b + 0{,}65\sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 M_t)^2}\right]. \tag{82}$$

Flexión lateral por compresión (pandeo)

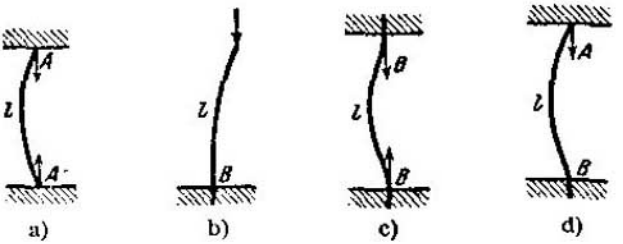
Fórmula de Euler para determinar la carga de pandeo

$$P_k = \beta\frac{EJ}{l^2}, \tag{83}$$

siendo l la longitud libre, J el m. de i. mínimo de la sección y β un coeficiente que depende de la forma de apoyo, o coeficiente de sustentación.

Formas de apoyo que se consideran:

A = articulación, B = Empotramiento



Coeficiente de sustentación:

$$\beta = \pi^2, \qquad \beta = \pi^2/4, \qquad \beta = 4\pi^2, \qquad \beta = 20{,}19. \tag{84}$$

Longitud reducida:

$$l_r = l, \qquad l_r = 2l, \qquad l_r = l/2, \qquad l_r = 0{,}7l. \tag{85}$$

Datos de v. Tetmajer para la carga de pandeo K_k en at.:

Se tiene $\lambda = l/i$ grado de esbeltez, $i = \sqrt{J_{min}/F}$.

Para madera,	$\lambda = 1{,}8$ a 100,	$K_k = 293 - 1{,}94\,\lambda$,	(86)
	$\lambda > 100$,	$K_k = 987\,000/\lambda^2$;	(87)
» fundición,	$\lambda < 80$,	$K_k = 7760 - 120\,\lambda + 0{,}53\,\lambda^2$,	(88)
	$\lambda > 80$,	$K_k = 9\,870\,000/\lambda^2$;	(89)
» hierro dulce,	$\lambda =$ a 112,	$K_k = 3030 - 12{,}9\,\lambda$,	(90)
	$\lambda > 112$,	$K_k = 19\,740\,000/\lambda^2$;	(91)
» acero dulce,	$\lambda = 10$ a 105,	$K_k = 3100 - 11{,}4\,\lambda$,	(92)
	$\lambda > 105$,	$K_k = 21\,220\,000/\lambda^2$.	(93)

Marcha del cálculo de las dimensiones de una barra sometida al pandeo, según v. Tetmajer.

Datos: P, K_d (ó σ_S) $\mathfrak{S}$, l (o l_r).

Incógnita: F.

Procedimiento: $k_d = K_d/\mathfrak{S}$: se calcula; $\lambda = l/i$. se supone. Hecho esto, se toma el valor α de la siguiente tabla:

Coeficiente α de la Tabla 4

$\lambda = l/i$	Madera	Fundición	Hierro dulce	Acero dulce
10	0,976	0,827	0,829	0,786
20	0,908	0,696	0,792	0,756
30	0,838	0,580	0,755	0,726
40	0,769	0,476	0,718	0,696
50	0,700	0,385	0,681	0,666
60	0,630	0,308	0,644	0,636
70	0,561	0,244	0,607	0,606
80	0,482	0,193	0,570	0,576
90	0,422		0,533	0,546
100	0,385		0,496	0,516
110			0,459	

Luego se hace

$$k_k = \alpha k_d \tag{94}$$

y

$$F = P/k_k, \tag{95}$$

y de aquí se deducen i y λ. Cuando hay mucha discrepancia con el valor de λ primeramente elegido, se repite el cálculo.

Marcha del cálculo según el procedimiento ω (Deutsche Reichsbahn, Preuss. Hochbauvorschriften, etc.).

Datos: P, k_d, l (ó l_r).

Incógnita: F.

Procedimiento: $\lambda = l/i$, se elige; ω, sale de las tablas (véase, por ejemplo, F rster, Manual del Ingeniero, tomo 2, págs. 204 y 394); finalmente,

$$F = \omega P/k_d, \tag{96}$$

y de aquí se deducen i y λ. Si hay discrepancia, se repite el cálculo.

El trabajo elástico o de deformación

Para tensiones normales, $$A = \frac{1}{2E}\int \sigma^2 dV. \tag{97}$$

Para tensiones tangenciales. $$A = \frac{1}{2G}\int \tau^2 dV, \tag{98}$$

siendo dV el elemento de volumen.

El trabajo elástico en una barra de sección F, debido a la fuerza axial P vale

$$A = \frac{1}{2}\frac{P^2 l}{EF} = \frac{1}{2} P\Delta l. \tag{99}$$

El trabajo elástico de una pieza de momento de inercia J respecto a la línea neutra, debido al momento flector vale

$$A = \frac{1}{2E}\int \frac{M^2}{J}\,dx\,. \qquad (100)$$

El trabajo elástico de una pieza, debido al momento torsor M_t vale

$$A = M_t\,\vartheta\cdot l/2\,, \qquad (101)$$

siendo ϑ el ángulo de giro o torsión por unidad de longitud.

Principio del mínimo trabajo elástico

Sea S una tensión interior hiperestática o la reacción de un apoyo inconmovible; se tiene

$$\frac{\partial A}{\partial S} = 0\,. \qquad (102)$$

La derivada del trabajo elástico

Sea A el trabajo elástico, y P una fuerza exterior; el desplazamiento de su punto de aplicación (o flecha) es

$$f = \frac{\partial A}{\partial P}\,. \qquad (103)$$

Varillas delgadas curvas

El trabajo elástico (prescindiendo de las fuerzas normales y tangenciales) es

$$A = \frac{1}{2E}\int_0^l \frac{M^2}{J}\,ds\,, \qquad (104)$$

siendo ds el elemento de su directriz, l la longitud de la varilla y J el m. de i. de la sección.

Vibraciones de una barra prismática

Sea $y = y\,(x)$ la vibración de una barra elástica; el número de vibraciones durante 2π segundos vale ω, siendo

$$\omega^2 = \frac{\int E J y''^2 dx}{\int \varrho y^2 dx}\,, \qquad (105)$$

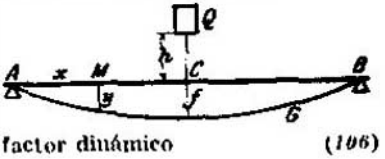
expresando ϱ la masa por unidad de longitud (densidad lineal).

Esta ecuación es válida para formas aproximadas a la $y\,(x)$, siempre que cumpla las condiciones límites.

Resistencia al choque

Primeramente hay que reducir el peso G de la viga que sufre el choque al punto C de choque que produce el peso Q cayendo de la altura h.

Sea f_1 la flecha dinámica del punto C, f la flecha estática (es decir, la producida por el peso estático Q) del mismo punto; de igual modo sean y_1 e y las flechas dinámica y estática en una sección cualquiera M; con estas designaciones se tiene



$$f_1/f = y_1 : y = n = \text{factor dinámico} \qquad (106)$$

Para determinar la velocidad inicial v_0 de C después del choque, hay que hallar el peso reducido de la viga según la siguiente ley:

$$G_1 = \Sigma\left(\Delta G \frac{y_1}{f_1}\right) = \Sigma\left(\Delta G \frac{y}{f}\right), \tag{107}$$

siendo ΔG un elemento de peso. Así se tiene

$$v_0 = \frac{Q}{Q + G_1}\sqrt{2gh}. \tag{108}$$

Para determinar la energía cinética T_0 después del choque, hay que reducir el peso G según la ley:

$$G_2 = \Sigma\left(\Delta G \frac{y_1^2}{f_1^2}\right) = \Sigma\left(\Delta G \frac{y^2}{f^2}\right), \tag{109}$$

y así se tiene

$$T_0 = \frac{1}{2}\frac{Q + G_2}{g} v_0^2 = Qh\frac{Q(Q + G_2)}{(Q + G_1)^2}. \tag{110}$$

Cuando, después del choque, la viga y el peso alcanzan su máxima flecha, hay un instante en que la energía cinética es nula y es aplicable el principio de la energía:

Energía inicial + Trabajo de las fuerzas exteriores = Trabajo elástico, o bien, según la fórmula (97),

$$T_0 + Qf_1 = \frac{1}{2E}\int \sigma_1^2 dx V, \tag{111}$$

siendo σ_1 las tensiones producidas por el choque. (Los trabajos de los pesos ΔG se destruyen con los de las tensiones producidas por el peso propio.)

Con carga estática Q, esta ecuación sería

$$A = \frac{1}{2} Qf = \frac{1}{2E}\int \sigma^2 dV,$$

siendo A el trabajo de deformación estática y σ las tensiones estáticas.

Haciendo ahora

$$f_1 = nf \quad \text{y} \quad \sigma_1 = n\sigma,$$

se tiene

$$T_0 + 2nA = n^2 A$$

o bien

$$n = 1 + \sqrt{1 + T_0/A}. \tag{112}$$

La carga estática nQ produce, por lo tanto, en la viga las mismas tensiones que la carga dinámica Q.

(A. Zschetzsche: ZVDI, tomo 38, pág. 134, 1894; F. Grashof: Theorie d. Elastizität u. Festigkeit. 2.ª ed., 1878).

PUBLICACIONES TÉCNICAS LABOR

MATEMÁTICAS

Tratado práctico de Matemáticas para ingenieros y físicos, por el Prof. R. ZURMÜHL. Unas 550 páginas y 114 figuras. *(En preparación.)*

Tratado de Matemáticas superiores para ingenieros y físicos, por el Prof. B. BAULE. 857 páginas y 508 figuras.

Elementos de Geometría, por el Prof. FRANCESCO SEVERI. Tres tomos.
Tomo I. Determinantes. Ecuaciones lineales. Límites, derivadas y diferenciales. Funciones y ecuaciones algebraicas. 460 páginas y 16 figuras.
» II. Serie de funciones. Aplicaciones geométricas. Integrales rectilíneas. Funciones de varias variables. Derivaciones e integraciones. 446 páginas y 40 figuras.
» III. Ecuaciones diferenciales ordinarias y sus sistemas. Problemas de contornos. Series trigonométricas. Aplicaciones geométricas. 259 páginas.

Tratado metódico de Matemáticas elementales, por el Prof. G. HOLZMÜLLER. Tres tomos con un total de 1113 páginas y 143 figuras. *(3.ª edición.)*

FÍSICA

Física general y experimental, por el Prof. ELIGIO PERUCCA. Dos tomos. *(2.ª edición. Reimpresión.)*
Tomo I. **Mecánica-Calor.** 1011 páginas y 713 figuras.
» II. **Óptica. Electricidad y Magnetismo.** 1185 páginas y 1000 figuras.

Tratado de Física, por el Prof. W. H. WESTPHAL. 935 páginas y 650 figuras. *(2.ª edición.)*

Curso de Física, por el Prof. W. WATSON. 997 páginas, 589 figuras y numerosos ejemplos demostrativos. *(3.ª edición. 4.ª reimpresión.)*

Prácticas de Física, por el Prof. W. H. WESTPHAL. 368 páginas, 106 figuras y 6 diagramas.

Prácticas fundamentales de Física, por los Profs. C. SCHAEFER, L. BERGMANN y W. KLIEFOTH. 276 páginas y 182 figuras.

Prácticas de Física, por el Prof. W. WATSON. 707 páginas, 282 figuras y un apéndice con 30 tablas numéricas de cálculo. *(2.ª reimpresión.)*

Diccionario de Física, por los Profs. E. VON ANGERER, L. BERGMANN, W. BRAUNBEK, C. VON FRAGSTEIN y otros. Dos tomos con unas 1700 páginas y numerosas figuras. *(En preparación).*

MECÁNICA

La Escuela del Técnico mecánico, publicado bajo la dirección del Prof. A. HOLZT, del Instituto técnico de Mittweida. Siete tomos y un atlas de construcción, con un total de 4359 páginas, 3736 figuras y 121 láminas. *(3.ª edición. Reimpresión.)*

Trabajos de Taller: Guía práctica del Mecánico moderno, publicado bajo la dirección del ingeniero JOSÉ SERRAT BONASTRE. 25 tomos publicados, con unas 300 páginas, profusamente ilustradas con fotografías, dibujos, gráficos y proyecciones.

Formulario del Técnico mecánico, por el Prof. KLINGELNBERG. 788 páginas y numerosas figuras y tablas numéricas. *(3.ª reimpresión.)*

Manual del Constructor de máquinas, por el Prof. H. DUBBEL. Dos tomos, con un total de 2004 páginas, 3000 figuras y numerosas tablas. *(2.ª edición, 4.ª reimpresión.)*

Manual del Taller mecánico y Vocabulario del taller, por FRED H. COLVIN y FRANK A. STANLEY. Dos tomos. 2025 páginas, 1059 figuras y 976 tablas. *(Reimpresión.)*

Manual universal de la Técnica mecánica para el taller y la oficina técnica, por ERIK OBERG y F. D. JONES. Dos tomos. 2130 páginas, 1367 figuras y tablas numéricas. *(Reimpresión.)*

Manual del Ingeniero constructor, por FERDINARD SCHLEICHER. Dos tomos. 2352 páginas y 2403 figuras. *(Reimpresión.)*

Manuales técnicos Labor. Biblioteca científica y profesional. Mecánica-Electricidad-Matemáticas-Física-Química-Artes industriales-Construcción. 65 volúmenes publicados, con un promedio de 300 páginas profusamente ilustradas con fotografías, dibujos, gráficos y proyecciones.

Mecánica general, por el Prof. I. RUBIO SANJUÁN. 491 páginas, 214 figuras y numerosos ejercicios y aplicaciones. *(2.ª edición.)*

Mecánica industrial, por el Prof. I. RUBIO SANJUÁN. 734 páginas, 582 figuras y numerosos ejercicios y aplicaciones. *(3.ª edición.)*

Lecciones sobre la teoría de la Mecánica y sus aplicaciones, por el Ingeniero M. LUCINI. 682 páginas, 390 figuras y 160 ejercicios resueltos. *(2.ª edición.)*

Termodinámica aplicada, por el Ingeniero M. LUCINI. 277 páginas, 76 figuras, 7 tablas numéricas, 6 diagramas entrópicos y numerosos ejercicios resueltos. *(3.ª edición, 2.ª reimpresión.)*

Turbomáquinas de vapor y de gas, por el Ingeniero M. LUCINI. 492 páginas, 332 figuras y 4 láminas. *(3.ª edición.)*

Tratado elemental de Mecánica aplicada, por A. MORLEY. 447 páginas y 261 figuras. *(2.ª reimpresión.)*

Mecánica para Ingenieros, por A. MORLEY. 311 páginas y 199 figuras. *(2.ª reimpresión.)*

Bombas centrífugas para líquidos y gases, por el Ing. C. PFLEIDERER. 475 páginas y 353 figuras. *(Próxima publicación.)*

Bombas. Manual para Escuelas de Ingenieros, por los Ings. MATTHIESSEN y FUCHSLOCHER. 219 páginas y 238 figuras.

Bombas centrífugas, por el Ingeniero L. QUANTZ. 172 páginas y 149 figuras. *(4.ª reimpresión.)*

Motores de combustión interna, publicado bajo la dirección del Profesor Dr. H. LIST, de Dresde. 16 volúmenes de unas 120 a 206 páginas, con gran número de figuras y tablas. *(En curso de publicación.)*

Elementos de Hidráulica general y aplicada, con motores hidráulicos, por el Ingeniero I. RUBIO SANJUÁN. 632 páginas, 362 figuras, numerosos ejercicios y aplicaciones, y 59 tablas. *(4.ª edición.)*

Tratado de Hidráulica aplicada, por Ingeniero Jefe CALVIN VICTOR DAVIS. 1358 páginas, 833 figuras y numerosas tablas.

Tratado de Hidráulica, por el Ingeniero PHILIPP FORCHHEIMER. 644 páginas, 393 figuras y numerosos gráficos. *(Reimpresión.)*

El motor Diesel moderno, por ORVILLE L. ADAMS. 374 páginas y 139 figuras. *(2.ª reimpresión.)*